Die Heineschen O-Funktionen

und ihre

Anwendungen auf die elliptischen Funktionen.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen Philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

K. B. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 26. Mai 1909

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Charles H. Ashton

aus Lawrence, Kansas, U. S. A.

München 1909

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei Dr. C. Wolf & Sohn.

Die Heineschen O-Funktionen

und ihre

Anwendungen auf die elliptischen Funktionen.

Inaugural-Dissertation

einer

Hohen Philosophischen Fakultät (II. Sektion)

der

K. B. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

ACAD.
LUDWIGMAX.
BIBL.

am 26. Mai 1909

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Charles H. Ashton

aus Lawrence, Kansas, U. S. A.

München 1909

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei Dr. C. Wolf & Sohn.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548322_0003

Einleitung.

Heine hat in seinen Kugelfunktionen, Seite 109, zwei Funktionen $O(q, \xi)$ und $\Omega(q, \xi)$ benutzt, welche er durch die folgenden Gleichungen definiert hat.

$$O(q, \xi) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - q^{\xi + n}\right),$$

$$\Omega(q, \xi) = \frac{O(q, o)}{O(q, \xi)}.$$

Er hat einige Eigenschaften dieser Funktionen bewiesen und auch gezeigt, dass sie nahe verwandt sind mit seiner φ-Funktion nnd mit den elliptischen Funktionen.

Ebenso hat Appell im 19. Bande der Mathematischen Annalen eine allgemeine O-Funktion folgendermassen definiert,

$$O(x \mid \omega, \omega_1 \ldots \omega_n) = \prod_{m_i = o}^{\infty} \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{\omega}} q_1^{2m_1} q_2^{2m_2} \ldots q_n^{2m_n}\right),$$

und gezeigt, dass man mittels dieser Funktion und ihrer Ableitungen Funktionen bilden kann, welche den folgenden Funktionalgleichungen genügen:

$$F(x + \omega) = F(x) \qquad \text{oder} \qquad F(x + \omega) = F(x)$$
$$F(x + \omega_1) = \varphi(x)\, F(x) \qquad F(x + \omega_1) = F(x) + \varphi(x).$$

In der vorliegenden Untersuchung werde ich vier O-Funktionen definieren, einige Eigenschaften dieser Funktionen und Beziehungen zwischen ihnen beweisen und auch zeigen, dass die elliptischen Funktionen von Jacobi und Weierstrass und alle Konstanten der elliptischen Funktionen durch diese O-Funktionen dargestellt werden können.

Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für die mannigfache Förderung während derselben bin ich Herrn Professor Lindemann in hohem Masse zu Dank verpflichtet.

§ 1. Definition der O-Funktion.

Seien ω_1 und ω_2 zwei beliebige, von Null verschiedene komplexe Zahlen, deren Verhältnis ebenfalls keine reelle Zahl ist. Dieses sei $\frac{\omega_2}{\omega_1} = a + b\,i$. Dabei soll die Bedingung $b < o$ erfüllt sein. Seien a_1 und a_2 zwei beliebige ganze Zahlen.

Die Funktion $O(z)$ definieren wir durch die folgende Funktionalgleichung

$$O(z) = \left[1 - e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z + \omega_2 + \frac{a_1\omega_1 - a_2\omega_2}{2}\right)}\right] O(z + \omega_2)$$

unter der Bedingung, dass

$$\lim_{n = \infty} O(z + n\,\omega_2) = 1 \text{ ist.}$$

Dass diese Bedingungen hinreichend sind, die Funktion vollständig zu bestimmen und dass es eine Funktion gibt, welche diese Bedingungen befriedigt, wird durch die folgenden Darstellungen der Funktion mittels eines unendlichen Produkts gezeigt. Setzen wir $e^{(a_1\omega_1 - a_2\omega_2)\frac{\pi i}{\omega_1}} = a$, dann ist

$$\begin{aligned} O(z) &= \left[1 - a\,e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}(z+\omega_2)}\right] O(z + \omega_2) \\ &= \left[1 - a\,e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}(z+\omega_2)}\right]\left[1 - a\,e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}(z+2\,\omega_2)}\right] O(z + 2\,\omega_2) \\ &= \prod_{1}^{n}{}_{s}\left[1 - a\,e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}(z+s\,\omega_2)}\right] \cdot O(z + n\,\omega_2). \end{aligned}$$

Es ist aber $\lim_{n = \infty} O(z + n\,\omega_2) = 1$. Also wird

$$(1) \qquad O(z) = \prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left[1 - a\,e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}(z+n\,\omega_2)}\right].$$

Dieses unendliche Produkt konvergiert absolut, wenn die folgende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a\,e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}(z+n\,\omega_2)}$ auch absolut konvergiert, oder wenn $\left|e^{\frac{2\pi i\,\omega_2}{\omega_1}}\right| < 1$ ist. Es ist $\frac{\omega_2}{\omega_1} = a + b\,i$, und $\left|e^{\frac{2\pi i\,\omega_2}{\omega_1}}\right| = e^{2\pi b}$ folglich muss b negativ sein. Das unendliche Produkt konvergier

also wenn, und nur wenn der imaginäre Teil des Verhältnisses $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ negativ ist. Es konvergiert absolut für jeden Wert von z und gleichmässig in jedem endlichen Bereich.

Die gegebenen Bedingungen sind also hinreichend, die Funktion vollständig festzusetzen.

Obgleich a_1 und a_2 beliebige Werte haben können, werden wir doch hier nur die vier Wertepaare (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) betrachten, welche wesentlich verschiedene Funktionen ergeben. Diese vier Funktionen werden wir mit $O_{00}(z)$, $O_{01}(z)$, $O_{10}(z)$ und $O_{11}(z)$ bezeichnen.

Setzen wir $e^{\frac{2\pi i \omega_2}{\omega_1}} = q$, dann lassen sich die vier O-Funktionen durch die unendlichen Produkte darstellen:

$$
\begin{aligned}
O_{00}(z) &= \prod_{1}^{\infty} \left(1 - q^n q^{\frac{z}{\omega_2}}\right), && [a = 1] \\
O_{01}(z) &= \prod_{1}^{\infty} \left(1 - q^{n-1/2} q^{\frac{z}{\omega_2}}\right), && \left[a = q^{-1/2}\right] \\
O_{10}(z) &= \prod_{1}^{\infty} \left(1 + q^n q^{\frac{z}{\omega_2}}\right), && [a = -1] \\
O_{11}(z) &= \prod_{1}^{\infty} \left(1 + q^{n-1/2} q^{\frac{z}{\omega_2}}\right). && \left[a = -q^{-1/2}\right]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Es ist klar, dass jede O-Funktion einfach periodisch ist mit der primitiven Periode ω_1, weil sie eine Funktion von $e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}}$ ist. Sie hat überhaupt keinen Pol in ihrem Fundamentalbereich und ist gleich 1 für $e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}} = 0$; aber sie hat einen wesentlichen singulären Punkt für $e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}} = \infty$. Sie ist also eine ganze transzendente Funktion und lässt sich in eine Reihe von der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{n \frac{2\pi i}{\omega_1} z}$$

entwickeln; dabei konvergiert die Reihe absolut und gleichmässig und stellt die Funktion in der ganzen Ebene dar.

§ 2.

Die Nullpunkte der Funktion sind die Wurzeln der Gleichung

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z+n_2\omega_2+\frac{a_1\omega_1-a_2\omega_2}{2}\right)}=1,$$

oder $z+n_2\omega_2+\frac{a_1\omega_1-a_2\omega_2}{2}=n_1\omega_1$, wobei n_1 die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ und n_2 die Reihe der positiven ganzen Zahlen von $+1$ bis $+\infty$ durchläuft. Also sind die Nullpunkte

$$z=\left(n_1-\frac{a_1}{2}\right)\omega_1-\left(n_2-\frac{a_2}{2}\right)\omega_2$$

$$n_1=0,\pm 1,\pm 2\ldots\ldots$$

$$n_2=1,2,3\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für $O_{00}(z)$, sind sie $z=n_1\omega_1-n_2\omega_2$,
für $O_{01}(z)$, $z=n_1\omega_1-(n_2-1/2)\omega_2$,
für $O_{10}(z)$, $z=(n_1-1/2)\omega_1-n_2\omega_2$,
für $O_{11}(z)$, $z=(n_1-1/2)\omega_1-(n_2-1/2)\omega_2$.

§ 3.

Aus der Funktionalgleichung können wir ohne Mühe die folgenden Beziehungen erhalten.

$$O_{01}(z)=O_{00}\left(z-\frac{\omega_2}{2}\right)=\left[1-e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right)}\right]O_{00}\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right),$$

$$O_{10}(z)=O_{00}\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$O_{11}(z)=O_{00}\left(z+\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)\right),=\left[1+e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right)}\right]O_{00}\left(z+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right),$$

$$O_{00}(z)=O_{10}\left(z-\frac{\omega_1}{2}\right)=O_{10}\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right), \qquad (3)$$

$$O_{01}(z)=O_{10}\left(z+\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)=\left[1-e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right)}\right]O_{10}\left(z+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right),$$

$$O_{11}(z)=O_{10}\left(z-\frac{\omega_2}{2}\right)=\left[1+e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right)}\right]O_{10}\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right),$$

$$O_{00}(z)=O_{01}\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right), \qquad O_{00}(z)=O_{11}\left(z+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right),$$

$$O_{10}(z) = O_{01}\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \qquad O_{01}(z) = O_{11}\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$O_{11}(z) = O_{01}\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right), \qquad O_{10}(z) = O_{11}\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right).$$

Von Wichtigkeit sind die Werte, welche die vier O-Funktionen für die Argumentwerte $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ annehmen und diese lassen sich mittels der obigen Tabelle auf die vier Konstanten

$$O_{00}(o) = O_{00},\ O_{01}(o) = O_{01},\ O_{10}(o) = O_{10},\ O_{11}(o) = O_{11}$$

zurückführen. Man erhält so die folgende Tabelle:

$$O_{00}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = O_{10}, \qquad O_{10}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = O_{00},$$

$$O_{00}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{1}{1 - e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}} O_{01}, \qquad O_{10}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}} O_{11},$$

$$O_{00}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}} O_{11}, \qquad O_{10}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = \frac{1}{1 - e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}} O_{01},$$

$$O_{00}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right) = O_{01}, \qquad O_{10}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right) = O_{11}, \tag{4}$$

$$O_{00}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) = O_{11}, \qquad O_{10}\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) = O_{01},$$

$$O_{01}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = O_{11}, \qquad O_{11}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = O_{01},$$

$$O_{01}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = O_{00}, \qquad O_{11}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = O_{10},$$

$$O_{01}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = O_{10}, \qquad O_{11}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = O_{00}.$$

§ 4. Darstellung der O-Funktion durch unendliche Reihen.

In § 1 zeigten wir, dass jede O-Funktion sich in eine Reihe von der Form $O(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{n \frac{2\pi i}{\omega_1} z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{\frac{n z}{\omega_2}}$ entwickeln lässt. Auch konvergiert die Reihe absolut und gleichmässig und stellt die Funktion in der ganzen Ebene dar. Weil $O(z) = 1$ für $e^{\frac{2\pi i}{\omega_1} z} = 0$, also ist $c_0 = 1$. Wir können daher annehmen, dass

$$O(z) = 1 + c_1 q^{\frac{z}{\omega_2}} + c_2 q^{\frac{2z}{\omega_2}} + c_3 q^{\frac{3z}{\omega_2}} \ldots\ldots \text{ ist.}$$

Also ist

$$\Theta(z+\omega_2) = 1 + c_1 q q^{\frac{z}{\omega_2}} + c_2 q^2 q^{\frac{2z}{\omega_2}} + c_3 q^3 q^{\frac{3z}{\omega_2}} \ldots\ldots$$

Unsere Funktionalgleichung ist

$$\Theta(z) = \left(1 - a q q^{\frac{z}{\omega_2}}\right) \Theta(z+\omega_2).$$

Substituieren wir die Reihen in diese Gleichung, so bekommen wir

$$1 + c_1 q^{\frac{z}{\omega_2}} + c_2 q^{\frac{2z}{\omega_2}} + c_3 q^{\frac{3z}{\omega_2}} \ldots\ldots$$

$$= 1 + (c_1 - a) q q^{\frac{z}{\omega_2}} + (c_2 - c_1 a) q^2 q^{\frac{2z}{\omega_2}} + (c_3 - c_2 a) q^3 q^{\frac{3z}{\omega_2}} \ldots\ldots$$

Weil diese Gleichung eine Identität ist, können wir setzen

$$c_1 = c_1 q - a q, \qquad c_3 = c_3 q^3 - c_2 a q^3,$$

$$c_2 = c_2 q^2 - c_1 a q^2, \qquad c_k = c_k q^k - c_{k-1} a q^k.$$

Daraus folgt $c_1 = -\frac{a q}{1 - a q}$,

$$c_2 = -\frac{c_1 a q^2}{1 - q^2} = \frac{a^2 q \cdot q^2}{(1-q)(1-q^2)},$$

$$c_3 = -\frac{c_2 a q^3}{1 - q^3} = -\frac{a^3 q \cdot q^2 \cdot q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}$$

und allgemein

$$c_k = (-1)^k a^k \Big|_1^k \frac{q^s}{1 - q^s}.$$

Dann ist

$$\Theta(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{nz}{\omega_2}} a^n \Big|_1^n \frac{q^s}{1 - q^s}.$$

Die Reihe konvergiert absolut für jeden positiven Wert von $\frac{z}{\omega_2}$, weil $\lim_{n=\infty} \left[\frac{\mu_n + 1}{\mu_n}\right] = 0$ ist. Setzen wir a gleich 1, $q^{-\frac{1}{2}}$, -1, $-q^{-\frac{1}{2}}$, so bekommen wir für die verschiedenen Θ-Funktionen die folgenden Reihen:

$$\Theta_{00}(z) = 1 - \frac{q}{1-q} q^{\frac{z}{\omega_2}} + \frac{q \cdot q^2}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2z}{\omega_2}}$$

$$- \frac{q \cdot q^2 \cdot q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} q^{\frac{3z}{\omega_2}} \ldots\ldots$$

(5)
$$O_{01}(z) = 1 - \frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q} q^{\frac{z}{\omega_2}} + \frac{q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}}}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2z}{\omega_2}} - \frac{q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot q^{\frac{5}{2}}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} q^{\frac{3z}{\omega_2}} \ldots \ldots$$

$$O_{10}(z) = 1 + \frac{q}{1-q} q^{\frac{z}{\omega_2}} + \frac{q \cdot q^2}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2z}{\omega_2}} + \frac{q \cdot q^2 \cdot q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} q^{\frac{3z}{\omega_2}} \ldots \ldots \ldots$$

$$O_{11}(z) = 1 + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q} q^{\frac{z}{\omega_2}} + \frac{q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}}}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2z}{\omega_2}} + \frac{q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot q^{\frac{5}{2}}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} q^{\frac{3z}{\omega_2}} \ldots \ldots \ldots$$

Heine hat diese Formel für $O_{00}(z)$ gegeben.

§ 5.

In der nämlichen Weise lässt sich jede Potenz einer O-Funktion oder Produkt von O-Funktionen in eine ähnliche Reihe entwickeln. Zum Beispiel $[O_{a_1 a_2}(z)]^2$ genügt der Funktionalgleichung

$$f(v) = (1 - 2aq^v + a^2 q^{2v})\, f(v+1), \text{ wo } v = \frac{z}{\omega_2} + 1,$$

und man erhält wie oben

$$O^2{}_{a_1 a_2}(z) = 1 + c_1 q^v + c_2 q^{2v} + c_3 q^{3v} + \ldots \ldots$$

wobei $c_1 = -\frac{2a}{1-q}$, $c_2 = \frac{-2c_1 aq + a^2}{1-q^2}$

und $c_k = \frac{-2c_{k-1} a q^{k-1} + c_{k-2} a^2 q^{k-2}}{1-q^k}$.

§ 6.

Der Quotient zweier beliebiger O-Funktionen mit demselben Wert von ω_1 und ω_2 ist keine ganze Funktion, denn sie hat die Nullpunkte des Nenners zu Polen. Aber, weil die Stelle $z = 0$ für die O-Funktion kein Nullpunkt ist, lässt sich dieser Quotient

in eine Reihe entwickeln, welche in einem Kreise um die Stelle $z = 0$ konvergiert.

Nehmen wir an, dass

$$f(v) = \frac{\Theta_{a_1 a_2}(z)}{\Theta_{b_1 b_2}(z)} \text{ ist, wobei } v = \frac{z}{\omega_2} + 1,$$

und setzen wir $a = e^{\frac{\pi i}{\omega_1}(a_1 \omega_1 - a_2 \omega_2)}$ und $b = e^{\frac{\pi i}{\omega_1}(b_1 \omega_1 - b_2 \omega_2)}$,

dann ist $$f(v) = \frac{1 - a q^v}{1 - b q^v} f(v+1).$$

Weil $f(\infty) = 1$ ist, können wir setzen

$$f(z) = 1 + c_1 q^v + c_2 q^{2v} + c_3 q^{3v} \ldots\ldots$$

Substituieren wir diese Reihe in die Funktionalgleichung, so bekommen wir

$$c_1 = \frac{b-a}{1-q},\ c_2 = \frac{b - aq}{1-q^2} c_1,\ c_3 = \frac{b - aq^2}{1-q^3} c_2,$$

und allgemein $$c_k = \frac{b - aq^{k-1}}{1-q^k} c_{k-1}.$$

Dann ist

$$\frac{\Theta_{a_1 a_2}(z)}{\Theta_{b_1 b_2}(z)} = 1 + \frac{(b-a)q}{1-q} q^{\frac{z}{\omega_2}} + \frac{(b-a)(b-aq)}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2z}{\omega_2}} + \frac{(b-a)(b-aq)(b-aq^2)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} q^{\frac{3z}{\omega_2}} + \ldots\ldots \tag{6}$$

In dieser Reihe ist $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \frac{b - aq^{n-1}}{1-q^n} q \cdot q^{\frac{z}{\omega_2}}$; also konvergiert die Reihe für

$$\left| q^{\frac{z}{\omega_2}} \right| < \left| \frac{1}{q\, e^{\frac{\pi i}{\omega_1}(b_1 \omega_1 - b_2 \omega_2)}} \right|,$$

oder

$$|z| < \left| \omega_2 + \frac{b_1 \omega_1 - b_2 \omega_2}{2} \right|.$$

Der Punkt $z = \omega_2 + \frac{b_1 \omega_1 - b_2 \omega_2}{2}$ ist der der Stelle $z = 0$ zunächst liegende Pol.

Setzen wir $b = 0$, dann ist $O_{b_1 b_2}(z) = 1$ und $f(v) = O_{a_1 a_2}(z)$, und die Reihe verwandelt sich in die folgende:

$$O_{a_1 a_2}(z) = 1 - \frac{a\,q}{1-q} q^{\frac{z}{\omega_2}} + \frac{a^2 q^3}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2z}{\omega_2}} \cdots\cdots$$

welche dieselbe ist als (5).

Dagegen setzen wir $a = 0$, so erhalten wir die Reihe für $\frac{1}{O_{b_1 b_2}(z)}$ nämlich:

$$(7) \qquad \frac{1}{O_{b_1 b_2}(z)} = 1 + \frac{b\,q}{1-q} q^{\frac{z}{\omega_2}} + \frac{b^2 q^2}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2z}{\omega_2}} + \frac{b^3 q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} q^{\frac{3z}{\omega_2}} + \cdots\cdots$$

§ 7. Produkte von der Form $O(z)\,O(-z)$.

Da wir später Produkte von der Form $O(z)\,O(-z)$ nötig haben werden, wollen wir sie hier in unendliche Reihen entwickeln.

Zuerst setzen wir $F_{01}(z) = O_{01}(z)\,O_{01}(-z)$ und suchen die Funktionen, in welche $F_{01}(z)$ sich verwandelt, wenn wir hierin z gleich $z + \frac{\omega_1}{2}$, $z - \frac{\omega_2}{2}$, $z + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ setzen.

Mit Benutzung von Formel (3) finden wir

$$F_{11}(z) = F_{01}\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) = O_{11}(z)\,O_{11}(-z),$$

$$F_{00}(z) = F_{01}\left(z - \frac{\omega_2}{2}\right) = O_{00}(z)\,O_{00}(-z)\cdot\left(1 - q^{\frac{z}{\omega_2}}\right),$$
$$= O_{00}(z-\omega_2)\,O_{00}(-z),$$

$$F_{10}(z) = F_{01}\left(z + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) = O_{10}(z)\,O_{10}(-z)\cdot\left(1 + q^{\frac{z}{\omega_2}}\right),$$
$$= O_{10}(z-\omega_2)\,O_{10}(-z).$$

Weil $O_{01}(-z) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(2z+\omega_2)}}\, O_{01}(-z-\omega_2)$ ist, genügt die Funktion $F_{01}(z)$ der folgenden Funktionalgleichung

$$F_{01}(z) = \frac{1 - e^{\frac{\pi i}{\omega_1}(2z+\omega_2)}}{1 - e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(2z+\omega_2)}} \quad F_{01}(z+\omega_2)$$

$$= q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}} \quad F_{01}(z+\omega_2).$$

Setzen wir hierin $z = z + \frac{\omega_1}{2}$, so bekommen wir

$$F_{11}(z) = q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}} \quad F_{11}(z+\omega_2),$$

$z = z - \frac{\omega_2}{2}$, $\quad F_{00}(z) = -q^{\frac{z}{\omega_2}} \quad F_{00}(z+\omega_2)$, und

$z = z + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$, $\quad F_{10}(z) = q^{\frac{z}{\omega_2}} \quad F_{10}(z+\omega_2)$.

§ 8.

Mit Hilfe ihrer Funktionalgleichung lässt sich die Funktion $F_{01}(z)$ leicht in eine unendliche Reihe entwickeln. Sie ist einfach periodisch mit der primitiven Periode ω_1 und hat keinen Pol. Aber weil sie eine wesentliche singuläre Stelle für $z = \infty$ besitzt und zwar unendlich wird, wenn z in jeder der beiden entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche wächst, hat die Reihe die Form

$$F_{01}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{n 2\pi i}{\omega_1} z}.$$

Auch ist $F_{01}(z)$ eine gerade Funktion, also $a_n = a_{-n}$. Dann können wir schreiben

$$F_{01}(z) = a_0 + a_1\left(q^{\frac{z}{\omega_2}} + q^{-\frac{z}{\omega_2}}\right) + a_2\left(q^{\frac{2z}{\omega_2}} + q^{-\frac{2z}{\omega_2}}\right) + \ldots\ldots \text{ und}$$

$$F_{01}(z+\omega_2) = a_0 + a_1\left(q^{\frac{z}{\omega_2}} + 1 + q^{-\frac{z}{\omega_2}} - 1\right)$$

$$+ a_2\left(q^{\frac{2z}{\omega_2}} + 2 + q^{-\frac{2z}{\omega_2}} - 2\right) + \ldots\ldots\ldots$$

Substituieren wir diese Reihen in die Funktionalgleichung, so bekommen wir

$$a_1 = -q^{\frac{1}{2}} a_0,$$

$$a_2 = -q^{\frac{3}{2}} a_1 = q^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} a_0,$$

$$a_3 = -q^{\frac{5}{2}} a_2 = -q^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} a_0, \text{ und}$$

allgemein $a_k = (-1)^k q^{\frac{2k-1}{2}+\frac{2k-3}{2}+\cdots\cdots\frac{1}{2}} a_0 = (-1)^k q^{\frac{k^2}{2}} a_0.$

Also ist $F_{01}(z) = a_0\left[1 - q^{\frac{1}{2}}\left(q^{\frac{z}{\omega_2}} + q^{-\frac{z}{\omega_2}}\right) + q^2\left(q^{\frac{2z}{\omega_2}} + q^{-\frac{2z}{\omega_2}}\right) - \ldots\right.$

Setzen wir $z + \frac{\omega_1}{2}$ an Stelle von z, so ergibt sich

$F_{11}(z) = a_0\left[1 + q^{\frac{1}{2}}\left(q^{\frac{z}{\omega_2}} + q^{-\frac{z}{\omega_2}}\right) + q^2\left(q^{\frac{2z}{\omega_2}} + q^{-\frac{2z}{\omega_2}}\right) + \ldots\ldots\ldots\right.$

für $z = z - \frac{\omega_2}{2}$,

$$F_{00}(z) = a_0\left[1 - q^{\frac{1}{2}}\left(q^{\frac{z}{\omega_2}} - \frac{1}{2} + q^{-\frac{z}{\omega_2}} + \frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left. + q^2\left(q^{\frac{2z}{\omega_2}} - 1 + q^{-\frac{2z}{\omega_2}} + 1\right) - \ldots\ldots\ldots\right.$$

und für $z = z + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$,

$$F_{10}(z) = a_0\left[1 + q^{\frac{1}{2}}\left(q^{\frac{z}{\omega}} - \frac{1}{2} + q^{-\frac{z}{\omega}} + \frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left. + q^2\left(q^{\frac{2z}{\omega_2}} - 1 + q^{-\frac{2z}{\omega_2}} + 1\right) + \ldots\ldots\ldots\right.$$

Man kann den Wert von a_0 in der folgenden Weise erhalten: Aus (5) folgt

$$O_{01}(z) = 1 - \frac{q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{z}{\omega_2}}}{1-q} + \frac{q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot q^{\frac{2z}{\omega_2}}}{(1-q)(1-q^2)} \cdot \ldots\ldots\ldots$$

und $$O_{01}(-z) = 1 - \frac{q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{-\frac{z}{\omega_2}}}{1-q} + \frac{q^{\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{3}{2}} \cdot q^{-\frac{2z}{\omega_2}}}{(1-q)(1-q^2)} \cdot \ldots\ldots\ldots$$

Multiplizieren wir die beiden Reihen miteinander, so lautet der Koeffizient von $q^{\frac{kz}{\omega_2}}$

$$a_k = \frac{(-1)^k q^{\frac{k^2}{2}}}{\left|\begin{matrix} k \\ s \\ 1 \end{matrix}\right| (1-q^s)}\left[1 + \frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q} \cdot \frac{q^{\frac{2k+1}{2}}}{1-q^{k+1}}\right.$$

$$\left. + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} \cdot \frac{q^{\frac{2k+1}{2}} q^{\frac{2k+3}{2}}}{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})} + \ldots\ldots\right.$$

Wir haben aber gezeigt, dass $a_k = (-1)^k q^{\frac{k^2}{2}} a_0$ ist. Setzen wir die in der Klammer stehende Reihe gleich $P(k)$, so bekommen wir, dass

$$\frac{P(k)}{\prod_{1}^{k} (1-q^s)} = a_0$$

für jeden beliebigen Wert von k ist. Also, weil $\lim_{k=\infty} P(k) = 1$ und $\lim_{k=\infty} \prod_{1}^{k} (1-q^s) = O_{00}$ erhalten wir schliesslich

$$a_0 = \frac{1}{O_{00}}.$$

Dann ist

$$F_{01}(z) = O_{01}(z)\, O_{01}(-z)$$
$$= \frac{1}{O_{00}}\left[1 - 2q^{\frac{1}{2}} \cos\frac{2\pi z}{\omega_1} + 2q^2 \cos\frac{4\pi z}{\omega_1} \cdots\cdots\right.$$
$$= \frac{1}{O_{00}}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{k^2}{2}} \cos\frac{2k\pi z}{\omega_1}\right],$$
$$F_{11}(z) = O_{11}(z)\, O_{11}(-z)$$
(8)
$$= \frac{1}{O_{00}}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} q^{\frac{k^2}{2}} \cos\frac{2k\pi z}{\omega_1}\right],$$
$$F_{00}(z) = O_{00}(z-\omega_2)\, O_{00}(-z)$$
$$= \frac{1}{O_{00}}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} \cos\frac{k\pi}{\omega_1}(2z-\omega_2)\right],$$
$$F_{10}(z) = O_{10}(z-\omega_2)\, O_{10}(-z)$$
$$= \frac{1}{O_{00}}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} q^{\frac{k^2}{2}} \cos\frac{k\pi}{\omega_1}(2z-\omega_2)\right],$$

wo nun die rechten Seiten offenbar mit den vier Θ-Funktionen eng zusammenhängen, worauf wir weiterhin zurückkommen.

Multiplizieren wir die Funktion $F_{00}(z)$ mit $-\frac{q^{-\frac{z}{2\omega_2}}}{2i}$, so verwandelt sie sich in $O_{00}(z)\, O(-z) \sin\frac{\pi z}{\omega_1}$, und die Reihe hat die Form

$$\frac{q^{\frac{z}{2\omega_2}} - q^{-\frac{z}{2\omega_2}}}{2i} - q\frac{q^{\frac{3z}{2\omega_2}} - q^{-\frac{3z}{2\omega_2}}}{2i} + q\cdot q^2\frac{q^{\frac{5z}{2\omega_2}} - q^{-\frac{5z}{2\omega_2}}}{2i} - \cdots\cdots$$

Dann ist

$$O_{00}\,O_{00}(z)\,O_{00}(-z)\cdot\sin\frac{\pi z}{\omega_1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\,q^{\frac{k(k-1)}{2}}\sin(2k-1)\frac{\pi z}{\omega_1}.$$

Multiplizieren wir auch die Funktion $F_{10}(z)$ mit $q^{-\frac{z}{2\omega_2}}$, so verwandelt sie sich in $O_{10}(z)\,O_{10}(-z)\cos\frac{\pi z}{\omega_1}$, und die Reihe hat die Form

$$\frac{q^{\frac{z}{2\omega_2}} + q^{-\frac{z}{2\omega_2}}}{2} + q\frac{q^{\frac{3z}{2\omega_2}} + q^{-\frac{3z}{2\omega_2}}}{2} + q\cdot q^2\frac{q^{\frac{5z}{2\omega_2}} + q^{-\frac{5z}{2\omega_2}}}{2} + \cdots\cdots$$

Dann ist

$$O_{00}\,O_{10}(z)\,O_{10}(-z)\cos\frac{\pi z}{\omega_1} = \sum_{k=1}^{\infty}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\cos(2k-1)\frac{\pi z}{\omega_1}.$$

Wir haben gesehen, dass für jeden beliebigen Wert von k $\frac{1}{O_{00}}$ gleich $\frac{P(k)}{\left|\prod_{1}^{k} n\right|(1-q^n)}$ ist. Aus dieser Gleichung ergeben sich viele ungewöhnliche Reihen für $\frac{1}{O_{00}}$. Zum Beispiel, wenn wir $k=0$ setzen,

$$\frac{1}{O_{00}} = 1 + \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q\cdot q^3}{(1-q)^2(1-q^2)^2} + \frac{q\cdot q^3\cdot q^5}{(1-q)^2(1-q^2)^2(1-q^3)^2} + \cdots\cdots$$

welche sehr verschieden von der Reihe (5) ist. Eine unendliche Menge anderer Reihen kann man erhalten, wenn man $k=1, 2, 3, \ldots\ldots$ setzt.

§ 9. Die Ω-Funktion.

Eine zweite Funktion, welche nahe verwandt ist mit der O-Funktion, definieren wir durch die Funktionalgleichung:

$$\Omega(z+\omega_2) = \left[1 - e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}(z+\omega_2) + \frac{(a_1\omega_1 - a_2\omega_2)}{2}}\right]\Omega(z),$$

unter der Bedingung, dass

$$\lim_{n=\infty} \Omega(z + n\omega_2) = O_{00}.$$

Es sei wieder $\frac{\omega_2}{\omega_1} = a + bi$ und wir wollen festsetzen, wie in § 1, dass $b < o$ sei. Auch setzen wir

$$e^{(a_1\omega_1 - a_2\omega_2)\frac{\pi i}{\omega_1}} = a \text{ und } e^{\frac{2\pi i \omega_2}{\omega_1}} = q,$$

dann ist $\Omega(z) = \dfrac{1}{1 - a\,q^{\frac{z}{\omega_2}+1}}\,\Omega(z+\omega_2),$

$$= \frac{1}{\left(1 - a\,q^{\frac{z}{\omega_2}+1}\right)\left(1 - a\,q^{\frac{z}{\omega_2}+2}\right)}\,\Omega(z+2\omega_2),$$

$$= \frac{\Omega(z+n\omega_2)}{\prod_{1}^{n}\left(1 - a\,q^{\frac{z}{\omega_2}+s}\right)}.$$

Indem wir die Bedingung $\lim_{n=\infty} \Omega(z+n\omega_2) = O_{00}$ benützen, bekommen wir durch den Grenzübergang für $n = \infty$

$$\Omega(z) = \prod_{1}^{\infty}\frac{1 - a\,q^{n}}{1 - a\,q^{\frac{z}{\omega_2}+n}}. \tag{9}$$

Daraus sehen wir, dass $\Omega(z) = \dfrac{O(0)}{O(z)}$, und wenn wir die verschiedenen Werte von a durch die Charakteristiken unterscheiden, dass $\Omega_{00}(z) = \dfrac{O_{00}}{O_{00}(z)}$, $\Omega_{01}(z) = \dfrac{O_{00}}{O_{01}(z)}$, $\Omega_{10}(z) = \dfrac{O_{00}}{O_{10}(z)}$, $\Omega_{11}(z) = \dfrac{O_{00}}{O_{11}(z)}$. Jede Ω-Funktion ist also eine Funktion, welche in allen Punkten der Ebene ausser den Punkten, in welchen die entsprechende O-Funktion verschwindet, also in den Punkten

$$z = \left(n_1 - \frac{a_1}{2}\right)\omega_1 - \left(n_2 - \frac{a_2}{2}\right)\omega_2$$

$$n_1 = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n_2 = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

den Charakter einer analytischen Funktion besitzt. In diesen Punkten hat $\Omega(z)$ einfache Pole. Setzen wir $z = 0$, so erhalten

wir $\Omega(0) = 1$ und $\Omega(n\omega_2) = \prod_{1}^{n} (1 - a q^s)$. Dann ist die Ω-Funktion eine rationale Funktion von q für $z = n\omega_2$, wobei n eine ganze Zahl ist.

§ 10. Darstellung der Ω-Funktion durch unendliche Reihen.

Die Ω-Funktionen lassen sich mit Hilfe ihrer Funktionalgleichungen in Reihen entwickeln wie die Θ-Funktion. Aber in § 6 haben wir schon die unendliche Reihe für $\frac{1}{\Theta(z)}$ gefunden. Daraus folgt

$$\Omega(z) = \frac{\Theta(0)}{\Theta(z)} = \Theta(0)\left[1 + \frac{a q}{1-q} q^{\frac{z}{\omega_2}} + \frac{a^2 q^2}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2z}{\omega_2}} + \frac{a^3 q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} q^{\frac{3z}{\omega_2}} + \ldots\ldots\right]$$

Führen wir in diese Gleichung die verschiedenen Werte von a ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Omega_{00}(z) &= \Theta_{00}\left[1 + \frac{q}{1-q} q^{\frac{z}{\omega_2}} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} q^{\frac{2z}{\omega_2}} \ldots\ldots\right], \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{00}(n\omega_2) \cdot q^{n\left(\frac{z}{\omega_2}+1\right)}, \\
\Omega_{01}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_{00}(n\omega_2)\, q^{n\left(\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}\right)}, \\
\Omega_{10}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Theta_{00}(n\omega_2)\, q^{n\left(\frac{z}{\omega_2}+1\right)}, \\
\Omega_{11}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Theta_{00}(n\omega_2)\, q^{n\left(\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Es war in § 6 gezeigt, dass diese Reihe absolut konvergiert für

$$|z| < \left|\omega_2 + \frac{a_1\omega_1 - a_2\omega_2}{2}\right|.$$

§ 11.

Betrachten wir $\Omega(z)$ als Funktion von $q^{\frac{z}{\omega_2}}$, so lässt sie sich auch auf eine andere Weise in eine unendliche Reihe entwickeln.

Wir setzen $q^{\frac{z}{\omega_2}} = y$.

Die Funktion $F(y) = \prod_{1}^{\infty} \frac{1-q^n}{1-q^n y}$ hat Pole in den Punkten, wo y gleich q^{-p} $(p = 1, 2 \ldots\ldots)$ ist.

Zuerst wollen wir das Residuum in jedem Pole bestimmen. Zu diesem Zwecke muss man den Grenzwert von $(y - q^{-p}) \prod_{1}^{n} \frac{1-q^s}{1-q^s y}$ für $n = \infty$ und $y = q^{-p}$ finden.

Aber, wenn $p > 1$ ist, wird

$$\lim_{n=\infty} \left[(y - q^{-p}) \prod_{1}^{n} \frac{1-q^s}{1-q^s y} \right]_{y = q^{-p}} =$$

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{(1-q^{n-p+1})\,(1-q^{n-p+2}) \ldots (1-q^n)}{-q^p \left(\frac{q-1}{q}\right) \left(\frac{q^2-1}{q^2}\right) \ldots\ldots \left(\frac{q^{p-1}-1}{q^{p-1}}\right)} \right],$$

und das Residuum in q^{-p} ist

$$(-1)^p \frac{q \cdot q^2 \ldots q^{p-1} q^{-p}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{p-1})} = (-1)^p q^{-p} \prod_{1}^{p-1} \frac{q^s}{1-q^s}.$$

Für $p = 1$ ist das Residuum gleich

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{-q(1-q)\ldots\ldots(1-q^n)} \right] = -\frac{1}{q}.$$

Weil $F(y)$ eine analytische Funktion von y ist in jedem Punkte der Ebene, die Punkte $y = q^{-p}$ ausgenommen, bildet man eine Funktion $S(z)$ mit denselben Polen und denselben Residuen, welche sonst analytisch ist. Es muss also die Differenz $S(z) - \Omega(z)$ eine ganze Funktion sein.

Eine solche Funktion ist

$$S(z) = -\frac{1}{q\left(q^{\frac{z}{\omega_2}} - q^{-1}\right)} + \sum_{p=2}^{\infty} \left[(-1)^p q^{-p} \prod_{1}^{p-1} \frac{q^s}{1-q^s} \right] \frac{1}{q^{\frac{z}{\omega_2}} - q^{-p}}$$

$$S(z) = \frac{1}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+1}} + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+p}} \left| \begin{matrix} p-1 \\ s \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{q^s}{1-q^s}$$

$$= \frac{1}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+1}} - \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+2}}$$

$$+ \frac{q \cdot q^2}{(1-q)(1-q^2)} \cdot \frac{1}{\left(1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+3}\right)} - \cdots\cdots$$

Wir wollen jetzt untersuchen, ob diese Funktion einer ähnlichen Funktionalgleichung wie die Funktion $\Omega(z)$ genügt. Bilden wir $\left(1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+1}\right) S(z)$, so ergibt sich

$$\left(1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+1}\right) S(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+1}}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+n}} \right) \left| \begin{matrix} n-1 \\ s \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{q^s}{1-q^s}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{q}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+n}} \right) \left| \begin{matrix} n-1 \\ s \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{q^s}{1-q^s}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{q}\right)^{n-1} \left| \begin{matrix} n-1 \\ s \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{q^s}{1-q^s}$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+n}} \left| \begin{matrix} n-2 \\ s \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{q^s}{1-q^s} + \frac{1}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+2}} - \cdots.$$

Aber die letzte Reihe ist gerade $S(z+\omega_2)$ und die Reihe $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{q}\right)^{n-1} \left| \begin{matrix} n-1 \\ s \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{q^s}{1-q^s}$ ist $O_{00}(-\omega_2)$. Weil $-\omega_2$ ein Nullpunkt von $O_{00}(z)$ ist, ist also diese Reihe Null und es folgt daraus $\left(1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+1}\right) S(z) = S(z+\omega_2)$.

Und so haben wir gezeigt, dass $S(z)$ derselben Funktionalgleichung wie $\Omega(z)$ genügt.

Schliesslich ist

$$\lim_{n=\infty} S(z + n\omega_2) = 1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q \cdot q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \cdots\cdots = O_{00}.$$

Daher genügt $S(z)$ der Definition von $\Omega(z)$ und muss ihr gleich sein. Dann ist

$$\Omega_{00}(z) = \frac{O_{00}}{O_{00}(z)} = \frac{1}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+1}} - \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+2}} + \frac{q \cdot q^2}{(1-q)(1-q^2)} \cdot \frac{1}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+3}} - \cdots\cdots$$

Ersetzen wir z durch $z + \frac{\omega_1}{2}$

$$(11)\quad \Omega_{10}(z) = \frac{O_{00}}{O_{10}(z)} = \frac{1}{1 + q^{\frac{z}{\omega_2}+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 + q^{\frac{z}{\omega_2}+n}} \left| \begin{matrix} n-1 \\ s \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{q^s}{1-q^s}.$$

Für $z = z - \frac{\omega_2}{2}$

$$\Omega_{01}(z) = \frac{O_{00}}{O_{01}(z)} = \frac{1}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{2n-1}{2}}} \left| \begin{matrix} n-1 \\ s \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{q^s}{1-q^s}.$$

Für $z = z + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$

$$\Omega_{11}(z) = \frac{O_{00}}{O_{11}(z)} = \frac{1}{1 + q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 + q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{2n-1}{2}}} \left| \begin{matrix} n-1 \\ s \\ 1 \end{matrix} \right| \frac{q^s}{1-q^s}.$$

§ 12. Die Φ-Funktion.

Aus der Darstellung der O- und Ω-Funktionen als unendliche Produkte haben wir

$$\log O(z) = \log O_{00} - \log \Omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 - a\, q^{\frac{z}{\omega_2}+n}\right).$$

Definieren wir eine neue Funktion $\Phi(z)$ durch die Gleichung

$$\Phi(z) = \frac{\omega_1}{2\pi i} \frac{d \log \Omega(z)}{dz} = -\frac{\omega_1}{2\pi i} \frac{d \log O(z)}{dz}$$

dann ist

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\, q^{\frac{z}{\omega_2}+n}}{1 - a\, q^{\frac{z}{\omega_2}+n}}.$$

Diese Funktion hat Pole in denselben Punkten wie $\Omega(z)$, weil jeder Faktor von $O(z)$ der Nenner eines Gliedes von $\Phi(z)$ ist. Sie hat also Pole in den Punkten

$$z = \left(n_1 - \frac{a_1}{2}\right)\omega_1 - \left(n_2 - \frac{a_2}{2}\right)\omega_2$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n_2 = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und ist in jedem anderen Punkte analytisch. Sie ist einfach periodisch mit der Periode ω_1 und lässt sich durch die beiden Funktionalgleichungen definieren

$$\Phi(z + \omega_1) = \Phi(z)$$
$$\Phi(z + \omega_2) = \Phi(z) - \frac{a\, q^{\frac{z}{\omega_2}+1}}{1 - a\, q^{\frac{z}{\omega_2}+1}},$$

unter der Bedingung, dass $\Phi(\infty) = 0$ ist.

§ 13.

Die Reihe $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\, q^{\nu+n}}{1 - a\, q^{\nu+n}}$, wo $\nu = \frac{z}{\omega_2} + 1$, lässt sich in folgender Weise umformen:

$$\frac{1}{1 - a\, q^{\nu}} = 1 + a\, q^{\nu} + a^2 q^{2\nu} + a^3 q^{3\nu} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{q}{1 - a\, q^{\nu+1}} = q + a\, q^2 q^{\nu} + a^2 q^3 q^{2\nu} + a^3 q^4 q^{3\nu} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{q^n}{1 - a\, q^{\nu+n}} = q^n + a\, q^{2n} q^{\nu} + a^2 q^{3n} q^{2\nu} + a^3 q^{4n} q^{3\nu} + \ldots\ldots\ldots$$

Jede dieser Reihen konvergiert im Innern des Kreises $|a\, q^{\nu}| < 1$. Ausserdem konvergiert die gegebene Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a\, q^{\nu+n}}{1 - a\, q^{\nu+n}}$ in jedem kleineren Kreise $|a\, q^{\nu}| < R < 1$ gleichmässig. Dann konvergiert jede Vertikalreihe und ihre Summe ist eine konvergierende Reihe, welche gleich der gegebenen Funktion $\Phi(z)$ für jene Werte von z ist.

Dadurch wird $\Phi(z) = \frac{a q^{\nu}}{1-q} + \frac{a^2 q^{2\nu}}{1-q^2} + \frac{a^3 q^{3\nu}}{1-q^3} + \ldots\ldots\ldots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n q^{n\left(\frac{z}{\omega_2}+1\right)}}{1-q^n}.$$

Jede Φ-Funktion lässt sich dann zweifach darstellen

$$\Phi_{00}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{z}{\omega_2}+n}}{1-q^{\frac{z}{\omega_2}+n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n\left(\frac{z}{\omega_2}+1\right)}}{1-q^n}$$

$$\Phi_{01}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{2n-1}{2}}}{1-q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{2n-1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n\left(\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}\right)}}{1-q^n} \tag{12}$$

$$\Phi_{10}(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{z}{\omega_2}+n}}{1+q^{\frac{z}{\omega_2}+n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n\left(\frac{z}{\omega_2}+1\right)}}{1-q^n}$$

$$\Phi_{11}(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{2n-1}{2}}}{1+q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{2n-1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n\left(\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}\right)}}{1-q^n}.$$

Heine hat diese Formel für $\Phi_{00}(z)$ gegeben.

§ 14.

Man kann auch für die Φ-Funktionen ähnliche Beziehungen wie auf § 3, für die Θ-Funktionen, leicht finden

$$\Phi_{01}(z) = \Phi_{00}\left(z - \frac{\omega_2}{2}\right) = \Phi_{00}\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right) + \frac{q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}}}{1-q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}}}$$

$$\Phi_{10}(z) = \Phi_{00}\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right)$$

$$\Phi_{11}(z) = \Phi_{00}\left(z + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) = \Phi_{00}\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) - \frac{q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}}}{1+q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{1}{2}}}$$

$$\Phi_{00}(z) = \Phi_{10}\left(z - \frac{\omega_1}{2}\right) = \Phi_{10}\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right),$$

(13)

$$\Phi_{01}(z) = \Phi_{10}\left(z + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) - \Phi_{10}\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \frac{q^{\frac{z}{\omega_2} + \frac{1}{2}}}{1 - q^{\frac{z}{\omega_2} + \frac{1}{2}}},$$

$$\Phi_{11}(z) = \Phi_{10}\left(z - \frac{\omega_2}{2}\right) = \Phi_{10}\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right) - \frac{q^{\frac{z}{\omega_2} + \frac{1}{2}}}{1 + q^{\frac{z}{\omega_2} + \frac{1}{2}}}.$$

$$\Phi_{00}(z) = \Phi_{01}\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right), \qquad \Phi_{00}(z) = \Phi_{11}\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right),$$

$$\Phi_{10}(z) = \Phi_{01}\left(z + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \qquad \Phi_{01}(z) = \Phi_{11}\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$\Phi_{11}(z) = \Phi_{01}\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right), \qquad \Phi_{10}(z) = \Phi_{11}\left(z + \frac{\omega_2}{2}\right).$$

Wenn wir $z = 0$ setzen, bekommen wir die Werte, welche die vier Φ-Funktionen für die Argumente $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ annehmen, auf die vier Grössen Φ_{00}, Φ_{01}, Φ_{10}, Φ_{11} zurückgeführt.

Aus der zweiten Form der Gleichungen (12) finden wir leicht die folgenden Gleichungen:

(14a)

$$\frac{1}{2}[\Phi_{00}(z) + \Phi_{00}(-z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^n} \cos n \frac{2\pi z}{\omega_1},$$

$$\frac{1}{2}[\Phi_{01}(z) + \Phi_{01}(-z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{n}{2}}}{1 - q^n} \cos n \frac{2\pi z}{\omega_1},$$

$$\frac{1}{2}[\Phi_{10}(z) + \Phi_{10}(-z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1 - q^n} \cos n \frac{2\pi z}{\omega_1},$$

$$\frac{1}{2}[\Phi_{11}(z) + \Phi_{11}(-z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{n}{2}}}{1 - q^n} \cos n \frac{2\pi z}{\omega_1}.$$

(14b)

$$\frac{1}{2i}[\Phi_{00}(z) - \Phi_{00}(-z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^n} \sin n \frac{2\pi z}{\omega_1},$$

$$\frac{1}{2i}[\Phi_{01}(z) - \Phi_{01}(-z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{n}{2}}}{1 - q^n} \sin n \frac{2\pi z}{\omega_1},$$

$$\frac{1}{2i}[\Phi_{10}(z) - \Phi_{10}(-z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1-q^n} \sin n\frac{2\pi z}{\omega_1},$$

$$\frac{1}{2i}[\Phi_{11}(z) - \Phi_{11}(-z)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{n}{2}}}{1-q^n} \sin n\frac{2\pi z}{\omega_1}.$$

§ 15. Darstellung der Φ-Funktionen durch unendliche Reihen von trigonometrischen Funktionen.

Die Φ-Funktionen lassen sich auch durch unendliche Reihen von trigonometrischen Funktionen in der folgenden Weise darstellen:

$$\Phi_{a_1 a_2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\, q^{\frac{z}{\omega_2}+n}}{1-a\, q^{\frac{z}{\omega_2}+n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left[z+n\omega_2+\frac{a_1\omega_1}{2}-\frac{a_2\omega_2}{2}\right]}}{1-e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left[z+n\omega_2+\frac{a_1\omega_1}{2}-\frac{a_2\omega_2}{2}\right]}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left[z+n\omega_2+\frac{a_1\omega_1}{2}-\frac{a_2\omega_2}{2}\right]}+1}{e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left[z+n\omega_2+\frac{a_1\omega_1}{2}-\frac{a_2\omega_2}{2}\right]}-1}\right].$$

Aber das zweite Glied ist gerade $\frac{1}{i}\cot\frac{\pi}{\omega_1}\left(z+n\omega_2+\frac{a_1\omega_1}{2}-\frac{a_2\omega_2}{2}\right)$

Daraus folgt, dass

$$(15)\qquad \Phi_{a_1 a_2}(z) = -\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\left[i+\cot\frac{\pi}{\omega_1}\left(z+n\omega_2+\frac{a_1\omega_1}{2}-\frac{a_2\omega_2}{2}\right)\right],$$

und $$\Phi'_{a_1 a_2}(z) = \frac{\pi}{2i\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{\omega_1}\left(z+n\omega_2+\frac{a_1\omega_1}{2}-\frac{a_2\omega_2}{2}\right)}.$$

§ 16. Multiplikationstheoreme der Θ-Funktionen.

Wir werden in den folgenden Betrachtungen Θ-Funktionen nötig haben mit verschiedenen Werten von ω_1 und ω_2. Wenn diese Grössen ihre gewöhnlichen Werte nicht haben, wollen wir zu z die geänderten Grössen hinzufügen. Wir schreiben also z. B. $\Theta(z, 2\omega_1)$ oder $\Theta\left(z, \frac{\omega_2}{2}\right)$.

In der Produktentwickelung von $\Theta_{a_1 a_2}(z)$ ersetzt man n durch $ks - r$, wo k, s und r positive ganze Zahlen sind, sie lässt sich dann in der folgenden Form darstellen:

$$O_{a_1 a_2}(z) = \prod_{k s - r = 1}^{\infty} \left[1 - e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z + (k s - r)\,\omega_2 + \frac{a_1 \omega_1 - a_2 \omega_2}{2}\right)}\right].$$

Ersetzt man z durch k z, so wird

$$O_{a_1 a_2}(k z) = \prod_{k s - r = 1}^{\infty} \left[1 - e^{\frac{2\pi i k}{\omega_1}\left(z + \left(s - \frac{r}{k}\right)\omega_2 + \frac{a_1 \omega_1 - a_2 \omega_2}{2k}\right)}\right].$$

Wenn wir r von $k - 1$ bis 0 und für jeden solchen Wert von r, s von 1 bis ∞ laufen lassen, so wird $k s - r$ die Werte aller ganzen positiven Zahlen annehmen.

Dann ist

$$O_{a_1 a_2}(k z) = \prod_{0}^{k-1} \prod_{1}^{\infty} \left[1 - e^{\frac{2\pi i k}{\omega_1}\left(z - \frac{r}{k}\omega_2 + \frac{a_1 \omega_1 - a_2 \omega_2}{2k} + s\,\omega_2\right)}\right]$$

$$= \prod_{0}^{k-1} O_{00}\left[z - \frac{r}{k}\omega_2 + \frac{a_1 \omega_1 - a_2 \omega_2}{2k},\ \frac{\omega_1}{k}\right]$$

$$= \prod_{0}^{k-1} O_{a_1 0}\left[z - \frac{\left(r + \frac{a_2}{2}\right)\omega_2}{k},\ \frac{\omega_1}{k}\right]$$

$$O_{a_1 a_2}(k z, k \omega_1) = O_{a_1 a_2}\left(z, \frac{\omega_2}{k}\right) = \prod_{0}^{k-1} O_{a_1 0}\left[z - \frac{\left(r + \frac{a_2}{2}\right)\omega_2}{k}\right]$$

$$(16) \qquad = \prod_{0}^{k-1} O_{a_1 a_2}\left[z - \frac{2r - k a_2 + a_2}{2k}\omega_2\right].$$

Diese Ausdrücke sind gültig für beliebige Werte von a_1 und a_2. Wenn $a_2 = 0$ ist, bekommen wir die folgende einfache Form:

$$(16a) \qquad O_{a_1 0}(k z) = \prod_{0}^{k-1} O_{a_1 0}\left(z - \frac{r}{k}\omega_2, \frac{\omega_1}{k}\right)$$

$$\text{oder} \quad O_{a_1 0}(k z, k \omega_1) = O_{a_1 0}\left(z, \frac{\omega_2}{k}\right) = \prod_{0}^{k-1} O_{a_1 0}\left(z - \frac{r}{k}\omega_2\right).$$

Wenn $a_2 = 1$ ist, so wird:

$$\left[2r \cdot - k + 1\right]_{r=0}^{r=k-1} - -(k - \cdot 1), \quad (k \quad 3), \ldots . (k \; - 3)(k - 1)$$

und es lässt sich die Formel schreiben:

$$(16b) \qquad O_{a_1 1}(k z, k \omega_1) - O_{a_1 1}\left(z, \frac{\omega_2}{k}\right) \cdot \cdot \prod O_{a_1 1}\left(z + \frac{r}{k} \omega_2\right)$$

$$\text{wo } r = -\frac{(k-1)}{2}, \frac{(k-3)}{2} \ldots \ldots \frac{k-1}{2}.$$

Ausserdem werden wir einen Ausdruck für $O_{a_1 a_2}\left(z, \frac{\omega_1}{k}\right)$ oder $O_{a_1 a_2}(k z, k \omega_2)$ erhalten. Ersetzt man ω_1 durch $\frac{\omega_1}{k}$, so wird

$$O_{a_1 a_2}\left(z, \frac{\omega_1}{k}\right) = \prod_{1}^{\infty} \left[1 - e^{\frac{2\pi i k}{\omega_1}\left(z + n\omega_2 + \frac{a_1 \omega_1}{2k} - \frac{a_2 \omega_2}{2}\right)}\right].$$

Aber weil $(1 - x^n) = (1 - x)(1 - \rho x) \ldots . (1 - \rho^{n-1} x)$ wo ρ eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit bezeichnet, folgt daraus

$$\left(1 - \cdot - e^{\frac{2\pi i k}{\omega_1} z}\right) = \prod_{0}^{k-1} \left(1 - e^{\frac{\pm 2\pi i s}{k}} e^{\frac{2\pi i z}{\omega_1}}\right).$$

und

$$O_{a_1 a_2}\left(z, \frac{\omega_1}{k}\right) = O_{a_1 a_2}(k z, k \omega_2)$$

$$- \cdot \prod_{0}^{k-1} \prod_{1}^{\infty} \left[1 - e^{\frac{\pm 2\pi i s}{k}} e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z + n\omega_2 + \frac{a_1 \omega_1}{2k} - \frac{a_2 \omega_2}{2}\right)}\right]$$

$$= \prod_{0}^{k-1} O_{00}\left(z \pm \frac{s}{k} \omega_1 + \frac{a_1 \omega_1}{2k} - \frac{a_2 \omega_2}{2}\right) \qquad (17)$$

$$= \prod_{0}^{k-1} O_{0 a_2}\left(z \pm \frac{s + \frac{a_1}{2}}{k} \omega_1\right)$$

$$= \prod_{0}^{k-1} O_{a_1 a_2}\left(z \pm \frac{2s \pm k a_1 + a_1}{2k} \omega_1\right).$$

In diesem Ausdruck kann s verschiedene Reihen von Werten annehmen, weil man s durch m s ersetzen kann, wo m eine ganze Zahl relativ prim zu k ist. Aber wir brauchen nur die drei Reihen $0, 1, 2, \ldots (k-1)$, $0, -1, -2 \ldots -(k-1)$, und wenn k ungerade ist $-\frac{k-1}{2}, -\frac{k-3}{2} \ldots \frac{k-3}{2}, \frac{k-1}{2}$.

Wenn $a_1 = 0$ ist, bekommen wir

$$(17a) \qquad O_{0\,a_2}\left(z, \frac{\omega_1}{k}\right) = O_{0\,a_2}(kz, k\omega_2) = \prod_{0}^{k-1} O_{0\,a_2}\left(z + \frac{s}{k}\omega_1\right).$$

In $2s \pm k a_1 + a_1$ ist es nicht notwendig, dasselbe Zeichen für jeden Faktor zu nehmen. Es kann also, wenn $a_1 = 1$ ist, $2s \pm k + 1$ noch verschiedene Reihen von Werten haben. Aber wir wollen nur die einfachsten Reihen benutzen, $-(k-1), -(k-3) \ldots (k-3), (k-1)$ oder $1, 3, 5 \ldots (2k-1)$, wenn k gerade ist, und $0, 2, 4 \ldots (2k-2)$ wenn k ungerade ist. Dann ist

$$(17b) \qquad O_{1\,a_2}\left(z, \frac{\omega_1}{k}\right) = O_{1\,a_2}(kz, k\omega_2) = \prod_{0}^{k-1} O_{1\,a_2}\left(z + \frac{2\lambda+1}{2k}\omega_1\right)$$

wenn k gerade ist,

$$= \prod_{0}^{k-1} O_{1\,a_2}\left(z \pm \frac{\lambda}{k}\omega_1\right)$$

wenn k ungerade ist, oder

$$= \prod O_{1\,a_2}\left(z \pm \frac{\lambda}{k}\omega_1\right)$$

$$\text{wo } \lambda = -\frac{k-1}{2}, \frac{k-3}{2} \ldots \frac{k-1}{2}$$

Wir haben gezeigt, dass

$$O_{a_1 a_2}(kz) = \prod_{0}^{k-1} O_{00}\left[z - \frac{r}{k}\omega_2 + \frac{a_1\omega_1}{2k} - \frac{a_2\omega_2}{2k}, \frac{\omega_1}{k}\right]$$

und

$$O_{00}\left(z, \frac{\omega_1}{k}\right) = \prod_{0}^{k-1} O_{00}\left[z \pm \frac{s}{k}\omega_1\right].$$

Daraus folgt durch Verbindung der beiden

$$O_{a_1 a_2}(k z) = \prod_{\substack{\mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0}}^{k-1} O_{00}\left(z + \frac{\pm\left(\mu_1 + \frac{a_1}{2}\right)\omega_1 - \left(\mu_2 + \frac{a_2}{2}\right)\omega_2}{k}\right)$$

(18)

$$= \prod_{\substack{\mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0}}^{k-1} O_{a_1 a_2}\left(z + \frac{\pm(2\mu_1 \pm k a_1 + a_1)\omega_1 - (2\mu_2 - k a + a_2)\omega_2}{2k}\right).$$

Hier, wie oben kann $2\mu_1 = k + 1$ verschiedene Reihen von Werten haben, aber $2\mu_2 - k + 1$ muss gerade die Reihe $-(k-1)$, $-(k-3) \ldots\ldots (k-1)$ durchlaufen. Also ist

(18a) $$O_{a_1 a_2}(k z) = \prod O_{a_1 a_2}\left(z + \frac{\pm\lambda_1 \omega_1 - \lambda_2 \omega_2}{2k}\right)$$

wobei $\lambda_1 = 0,\ 2, \ldots . 2k - 2$, wenn $a_1 = 0$ ist oder $a_1 = 1$ und k ungerade ist,

$\lambda_1 = 1,\ 3, \ldots . 2k - 1$, wenn $a_1 = 1$ und k gerade ist,

$\lambda_2 = 0,\ 2, \ldots . 2k - 2$, wenn $a_2 = 0$ ist und

$\lambda_2 = -(k-1),\ -(k-3) \ldots . (k-1)$ wenn $a_2 = 1$ ist.

Heine hat diese Formel für $O_{00}(k z)$ gegeben.

Für $k = 2$ geben diese verschiedenen Formeln sehr einfache Beziehungen.

Aus (16a) folgt

$$O_{00}(2z,\ 2\omega_1) = O_{00}\left(z,\ \frac{\omega_2}{2}\right) \cdot O_{00}(z) \cdot O_{01}(z)$$

und $$O_{10}(2z,\ 2\omega_1) = O_{10}\left(z,\ \frac{\omega_2}{2}\right) \cdot O_{10}(z) \cdot O_{11}(z)$$

aus (17a) $$O_{00}\left(z,\ \frac{\omega_1}{2}\right) = O_{00}(2z,\ 2\omega_2) = O_{00}(z) \cdot O_{10}(z)$$

und $$O_{01}\left(z,\ \frac{\omega_1}{2}\right) = O_{01}(2z,\ 2\omega_2) = O_{01}(z) \cdot O_{11}(z) \qquad (19)$$

aus (16b) $$O_{01}(2z,\ 2\omega_1) = O_{01}\left(z,\ \frac{\omega_2}{2}\right) = O_{00}\left(z - \frac{\omega_2}{4}\right) \cdot O_{01}\left(z - \frac{\omega_2}{4}\right)$$

und $$O_{11}(2z,\ 2\omega_1) = O_{11}\left(z,\ \frac{\omega_2}{2}\right) = O_{10}\left(z - \frac{\omega_2}{4}\right) \cdot O_{11}\left(z - \frac{\omega_2}{4}\right)$$

us (17b) $$O_{10}\left(z,\ \frac{\omega_1}{2}\right) = O_{10}(2z,\ 2\omega_2) = O_{00}\left(z + \frac{\omega_1}{4}\right) \cdot O_{10}\left(z + \frac{\omega_1}{4}\right)$$

und $$O_{11}\left(z,\ \frac{\omega_1}{2}\right) = O_{11}(2z,\ 2\omega_2) = O_{01}\left(z + \frac{\omega_1}{4}\right) \cdot O_{11}\left(z + \frac{\omega_1}{4}\right).$$

Setzt man $a_1 = a_2 = 0$ und $k = 2$, so wird Formel (18)

$$\vartheta_{00}(2z) = \prod_{\substack{\mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0}}^{1} \vartheta_{00}\left(z + \frac{\mu_1 \omega_1 - \mu_2 \omega_2}{2}\right)$$

oder $\vartheta_{00}(2z) = \vartheta_{00}(z),\ \vartheta_{10}(z),\ \vartheta_{01}(z),\ \vartheta_{11}(z)$.

Für $z = 0$ gibt diese

(20) $$\vartheta_{10} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_{11} = 1.$$

§ 17.

Wir werden auch eine Formel für $\vartheta_{a_1 0}(kz - \omega_2)$ brauchen. Aus der Definition der ϑ-Funktion ergibt sich

$$\vartheta_{a_1 0}(z - \omega_2) = \prod_{n=0}^{\infty}\left[1 - e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z + n\omega_2 + \frac{a_1}{2}\omega_1\right)}\right]$$

wo n von 0 bis ∞ statt 1 bis ∞ lauft. Wenn wir dieses Produkt benutzen, müssen wir schreiben statt der zweiten Gleichung in § 16

$$\vartheta_{a_1 0}(kz - \omega_2) = \prod_{ks + r = 0}^{\infty}\left[1 - e^{\frac{2\pi i k}{\omega_1}\left(z + \left(s + \frac{r}{k}\right)\omega_2 + \frac{a_1}{2k}\omega_1\right)}\right]$$

$$= \prod_{0}^{k-1}{}_{r} \prod_{0}^{\infty}{}_{s}\left[1 - e^{\frac{2\pi i k}{\omega_1}\left(z + \frac{r}{k}\omega_2 + \frac{a_2}{2k}\omega_2 + s\omega_2\right)}\right]$$

$$= \prod_{0}^{k-1}{}_{r}\, \vartheta_{a_1 0}\left(z - \omega_2 + \frac{r}{k}\omega_2,\ \frac{\omega_1}{k}\right),$$

(21a) und $$\vartheta_{a_1 0}(kz - \omega_2,\ k\omega_1) = \prod_{0}^{k-1}{}_{r}\, \vartheta_{a_1 0}\left(z - \omega_2 + \frac{r}{k}\omega_2\right).$$

Die Formeln für $\vartheta_{a_1 0}\left(z - \omega_2, \frac{\omega_1}{k}\right)$ haben dieselbe Form wie für $\vartheta_{a_1 0}\left(z, \frac{\omega_1}{k}\right)$ oder

$$(21\,b)\qquad O_{a_1\,0}\left(z-\omega_2,\frac{\omega_1}{k}\right)=\prod_{0}^{k-1}{}_{s}\;O_{00}\left(z-\omega_2\pm\frac{s+\frac{a_1}{2}}{k}\,\omega_1\right)$$

$$=\prod_{0}^{k-1}{}_{s}\;O_{a_1\,0}\left(z-\omega_1\pm\frac{2\,s\pm k\,a_1+a_1}{k}\,\omega_1\right)$$

Schliesslich ist

$$O_{a_1\,0}\,(k\,z-\omega_2)=\prod_{\substack{\mu_1=0\\ \mu_2=0}}^{\infty}O_{00}\left(z-\omega_2+\frac{\pm\left(\mu_1+\frac{a_1}{2}\right)\omega_1+\mu_2\,\omega_2}{k}\right)$$

$$(21\,c)\qquad=\prod_{\substack{\mu_1=0\\ \mu_2=0}}^{\infty}O_{a_1\,0}\left(z-\omega_2+\frac{\pm(2\,\mu_1\pm k\,a_1+a_1)\,\omega_1+2\,\mu_2\,\omega_2}{2\,k}\right)$$

$$=\prod O_{a_1\,0}\left(z-\omega_2+\frac{\pm\lambda_1\,\omega_1+2\,\mu_2\,\omega_2}{2\,k}\right),$$

wo λ_1 dieselben Werte hat als in Formel (18a) und $\mu_2=1,\ 2\ldots\ldots k-1$.

§ 18. **Multiplikationstheoreme der F-Funktionen.**

Zur Anwendung auf die elliptischen Funktionen brauchen wir die Multiplikationstheoreme der F-Funktionen, welche in § 7 wir wie folgend definiert haben:

$$F_{01}(z)=O_{01}(z)\,O_{01}(-z)$$

$$F_{00}(z)=O_{00}(z-\omega_2)\,O_{00}(-z)=F_{01}\left(z-\frac{\omega_2}{2}\right)$$

$$F_{10}(z)=O_{10}(z-\omega_2)\,O_{10}(-z)=F_{01}\left(z+\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)$$

$$F_{11}(z)=O_{11}(z)\,O_{11}(-z)=F_{01}\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right).$$

Einige der folgenden Betrachtungen fallen verschieden aus, je nachdem k gerade oder ungerade ist; wir wollen indessen nur die Fälle, wo k ungerade ist, betrachten.

Aus Formel (16a) und (21a) folgt

$$F_{a_1 0}(k z, k \omega_1) = F_{a_1 0}\left(z, \frac{\omega_2}{k}\right)$$

$$= \overline{\left| \begin{matrix} k-1 \\ r \\ 0 \end{matrix} \right|} O_{a_1 0}\left(z - \omega_2 + \frac{r}{k}\omega_2\right) \cdot O_{a_1 0}\left(-z - \frac{r}{k}\omega_2\right) \tag{22a}$$

$$= \overline{\left| \begin{matrix} k-1 \\ r \\ 0 \end{matrix} \right|} F_{a_1 0}\left(z + \frac{r}{k}\omega_2\right),$$

aus Formel (16 b)

$$F_{a_1 1}(k z, k \omega) = F_{a_1 1}\left(z, \frac{\omega_2}{k}\right)$$

$$= \overline{\left| \begin{matrix} k-1 \\ \lambda \\ 0 \end{matrix} \right|} O_{a_1 1}\left(z + \frac{\lambda}{k}\omega_2\right) O_{a_1 1}\left(-z - \frac{\lambda}{k}\omega_2\right) \tag{22b}$$

$$= \overline{\left| \begin{matrix} k-1 \\ \lambda \\ 0 \end{matrix} \right|} F_{a_1 1}\left(z + \frac{\lambda}{k}\omega_2\right)$$

$$\text{wo } \lambda = -\frac{k-1}{2}, -\frac{k-3}{2} \ldots\ldots \frac{k-3}{2}, \frac{k-1}{2}.$$

In ähnlicher Weise kann man aus Formel (17) und (21 b) leicht erhalten:

$$F_{a_1 a_2}\left(z, \frac{\omega_1}{k}\right) = F_{a_1 a_2}(k z, k \omega_2) = \overline{\left| \begin{matrix} s \end{matrix} \right|}\left(z + \frac{s}{k}\omega_1\right) \tag{22c}$$

wo s verschiedene Reihen von Werten haben kann, besonders

$$s = 0, 1, 2, \ldots\ldots (k-1),$$
$$= 0, -1, -2, \ldots\ldots -(k-1),$$

oder $s = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots \pm\left(\frac{k-1}{2}\right)$ wenn k ungerade ist.

Schliesslich folgt aus den Formeln (18a) und (21c)

$$F_{a_1 a_2}(k z) = \overline{\left| \quad \right|} F_{a_1 a_2}\left(z + \frac{\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2}{k}\right), \tag{22d}$$

wo λ_1 die Werte von s hat und

$\lambda_2 = 0, 1, \ldots\ldots k-1$, wenn $a_2 = 0$ ist,

$-\frac{k-1}{2}, -\frac{k-3}{2}, \ldots\ldots \frac{k-1}{2}$, wenn $a_2 = 1$ ist.

Es ist nicht bequem, diese Formeln mit verschiedenen Reihen von λ zu benutzen. Man kann sie so schreiben, dass sie gültig

sind für jede beliebige Reihe von Werten, aber sie sind am einfachsten, wenn beide, λ_1 und λ_2, die Werte $-\frac{k-1}{2}$, $-\frac{k-3}{2}$ ..... $\frac{k-1}{2}$, annehmen. Alle Formeln, in welchen $a_2 = 1$ ist sind für diese Reihe schon gültig, wenn k ungerade ist, und es ist nur nötig in zwei Fällen dieselben umzuformen.

Aus § 7 folgt

$$F_{00}\left(z+\frac{r}{k}\omega_2\right) = -q^{\frac{z}{\omega_2}+\frac{r}{k}} F_{00}\left(z+\frac{r}{k}\omega_2+\omega_2\right).$$

Wenn k ungerade ist

$$\left|\begin{matrix} r \\ k+1 \\ 2 \end{matrix}\right|^{k-1} F_{00}\left(z+\frac{r}{k}\omega_2\right) = \left|\begin{matrix} r \\ -1 \end{matrix}\right|^{-\frac{k-1}{2}} F_{00}\left(z+\frac{r}{k}\omega_2+\omega_2\right)$$

$$= (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left|\begin{matrix} r \\ -1 \end{matrix}\right|^{-\frac{k-1}{2}} q^{-\frac{z}{\omega_2}-\frac{r}{k}} F_{00}\left(z+\frac{r}{k}\omega_2\right)$$

$$= (-1)^{\frac{k-1}{2}} q^{-\frac{(k-1)}{2}\frac{z}{\omega_2}+\frac{k^2-1}{8k}} \left|\begin{matrix} r \\ -\frac{k-1}{2} \end{matrix}\right|^{-1} F_{00}\left(z+\frac{r}{k}\omega_2\right).$$

Dann ist

(23a)
$$F_{00}(kz, k\omega_1) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} q^{-\frac{(k-1)}{2}\frac{z}{\omega_2}+\frac{k^2-1}{8k}} \left|\begin{matrix} r \\ -\frac{k-1}{2} \end{matrix}\right|^{\frac{k-1}{2}} F_{00}\left(z+\frac{r}{k}\omega_2\right)$$

In derselben Weise

(23b)
$$F_{10}(kz, k\omega_1) = q^{-\frac{k-1}{2}\frac{z}{\omega_2}+\frac{k^2-1}{8k}} \left|\begin{matrix} r \\ -\frac{k-1}{2} \end{matrix}\right|^{\frac{k-1}{2}} F_{10}\left(z+\frac{r}{k}\omega_2\right)$$

(23c) $F_{00}(kz)$

$$= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{-\frac{k(k-1)}{2}\frac{z}{\omega_2}+\frac{k^2-1}{8}} \sum_{\substack{\lambda_1 \\ \lambda_2}}^{\substack{\frac{k-1}{2} \\ -\frac{k-1}{2}}} F_{00}\left(z+\frac{\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2}{k}\right)$$

(23d) $$F_{10}(kz) = q^{-\frac{k(k-1)}{2}\frac{z}{\omega_2}+\frac{k^2-1}{8}} \sum_{\substack{\lambda_1 \\ \lambda_2}}^{\substack{\frac{k-1}{2} \\ -\frac{k-1}{2}}} F_{10}\left(z+\frac{\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2}{k}\right)$$

Wenn k gerade ist, sind die Formeln etwas verschieden, aber wir wollen sie hier nicht angeben.

§ 19. Multiplikationstheoreme der Φ-Funktion.

Durch Differentiation leitet man aus Formel (16), (17), (18 die Multiplikationstheoreme der Φ-Funktionen her:

Aus (16a) folgt

(24a) $$\Phi_{a_1 0}(kz, k\omega_1) = \Phi_{a_1 0}\left(z, \frac{\omega_2}{k}\right) = \sum_{0}^{k-1} \Phi_{a_1 0}\left(z-\frac{r\omega_2}{k}\right)$$

aus (16b)

(24b) $$\Phi_{a_1 1}(kz, k\omega_2) = \Phi_{a_1 1}\left(z, \frac{\omega_2}{k}\right) = \sum_{\lambda=-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} \Phi_{a_1 1}\left(z+\frac{\lambda}{k}\omega_2\right)$$

aus (17a)

(25a) $$\Phi_{0 a_2}(kz, k\omega_2) = \Phi_{0 a_2}\left(z, \frac{\omega_1}{k}\right) = \frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1} \Phi_{0 a_2}\left(z+\frac{s}{k}\omega_1\right)$$

aus (17b)

(25b) $$\Phi_{1 a_2}(kz, k\omega_2) = \Phi_{1 a_2}\left(z, \frac{\omega_1}{k}\right) = \frac{1}{k}\sum_{\lambda=-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}} \Phi_{1 a_2}\left(z+\frac{\lambda}{k}\omega_1\right)$$

und allgemein aus Formel (18)

$$(26)\qquad \Phi_{a_1 a_2}(k z) = \frac{1}{k} \sum_{\substack{\mu_1 = 0 \\ \mu_2 = 0}}^{\infty} \Phi_{00}\left(z + \frac{\left(\mu_1 + \frac{a_1}{2}\right)\omega_1 - \left(\mu_2 + \frac{a_2}{2}\right)\omega_2}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{k} \sum \Phi_{a_1 a_2}\left(z + \frac{\lambda_1 \omega_1 - \lambda_2 \omega_2}{2k}\right)$$

wo λ_1 und λ_2 dieselben Werte wie in Formel (18a) haben.

Setzen wir $k = 2$

$$\Phi_{00}(2z, 2\omega_1) = \Phi_{00}\left(z, \frac{\omega_2}{2}\right) + \Phi_{00}(z) + \Phi_{01}(z)$$

$$\Phi_{10}(2z, 2\omega_1) = \Phi_{10}\left(z, \frac{\omega_2}{2}\right) = \Phi_{10}(z) + \Phi_{11}(z)$$

$$\Phi_{00}\left(z, \frac{\omega_1}{2}\right) = \Phi_{00}(2z, 2\omega_2) = \frac{1}{k}(\Phi_{00}(z) + \Phi_{10}(z))$$

$$\Phi_{01}\left(z, \frac{\omega_1}{2}\right) = \Phi_{01}(2z, 2\omega_2) = \frac{1}{k}(\Phi_{01}(z) + \Phi_{11}(z)).$$

Setzen wir $a_1 = a_2 = 0$ und $k = z$, so wird Formel (26)

$$2\,\Phi_{00}(2z) = \Phi_{00}(z) + \Phi_{00}\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) + \Phi_{00}\left(z - \frac{\omega_2}{2}\right) + \Phi_{00}\left(z + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)$$

$$= \Phi_{00}(z) + \Phi_{10}(z) + \Phi_{01}(z) + \Phi_{11}(z).$$

Für $z = 0$

$$(27)\qquad \Phi_{00} = \Phi_{10} + \Phi_{01} + \Phi_{11}$$

was der Formel (20) für $0(z)$ entspricht.

§ 20.

Mit Anwendung einer ähnlichen Methode, wie sie Gauss in § 33 seiner Disquisitiones gen. circa ser. inf. bei seiner Untersuchung der ψ-Funktion benutzt, werden wir ein interessantes Resultat für Φ erreichen.

Wir setzen $\frac{2\pi}{k} = \alpha$, wo α eine ganze Zahl ist und es sei β jede der Winkel α, 2α . . . . . $(k-1)\alpha$ bezüglich.

Dann ist $\cos k\beta = \cos 2k\beta = \ldots = \cos nk\beta = 1$.

Auch ist $\cos \beta = \cos (k+1)\beta = \cos (2k+1)\beta$ . . . . . .

und $\cos \beta + \cos 2\beta + \ldots . \cos (k-1)\beta + 1 = 0$.

Mit Benutzung der Formel

$$\Phi_{00}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{z}{\omega_2}+n}}{1-q^{\frac{z}{\omega_2}+n}}$$

erhalten wir leicht die folgenden Gleichungen:

$$\cos\beta \cdot \Phi_{00}\left(\frac{1-k}{k}\omega_2\right) = \frac{q^{\frac{1}{k}}}{1-q^{\frac{1}{k}}}\cos\beta + \frac{q^{\frac{1}{k}+1}}{1-q^{\frac{1}{k}+1}}\cos(k+1)\beta + \ldots\ldots$$

$$\cos 2\beta \cdot \Phi_{00}\left(\frac{2-k}{k}\omega_2\right) = \frac{q^{\frac{2}{k}}}{1-q^{\frac{2}{k}}}\cos 2\beta + \frac{q^{\frac{2}{k}+1}}{1-q^{\frac{2}{k}+1}}\cos(k+2)\beta + \ldots\ldots$$

$$\cos(k-1)\beta \cdot \Phi_{00}\left(-\frac{1}{k}\omega_2\right) = \frac{q^{\frac{k-1}{k}}}{1-q^{\frac{k-1}{k}}}\cos(k-1)\beta + \frac{q^{\frac{k-1}{k}+1}}{1-q^{\frac{k-1}{k}+1}}\cos(2k-1)\beta + \ldots$$

$$\cos k\beta \cdot \Phi_{00} = \frac{q^{\frac{k}{k}}}{1-q^{\frac{k}{k}}}\cos k\beta + \frac{q^{\frac{k}{k}+1}}{1-q^{\frac{k}{k}+1}}\cos 2k\beta + \ldots\ldots\ldots$$

Addieren wir diese Gleichungen, so ist die Summe der rechten Seiten eine Reihe der Form $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{\lambda}{k}}}{1-q^{\frac{\lambda}{k}}}\cos\lambda\beta$, welche wir mit $X(\beta)$ bezeichnen wollen.

Dann ist $\cos\beta \cdot \Phi_{00}\left(\frac{1-k}{k}\omega_2\right) + \cos 2\beta \cdot \Phi_{00}\left(\frac{2-k}{k}\omega_2\right) + \ldots$

$\cos(k-1)\beta \cdot \Phi_{00}\left(-\frac{1}{k}\omega_2\right) + \cos k\beta \cdot \Phi_{00} = X(\beta)$.

In dieser Gleichung setzen wir der Reihe nach $\beta = \alpha,\ 2\alpha,$ $\ldots.(k-1)\alpha$, und multiplizieren die erste Gleichung mit $\cos m\alpha$, wo m eine ganze Zahl kleiner als k ist, die zweite mit $\cos 2m\alpha$,

die $(k-1)^{te}$ mit $\cos(k-1)\,m\,\alpha$. Dann addieren wir diese $k-1$-Gleichungen samt der Gleichung

$$\Phi_{00}\left(\frac{1-k}{k}\,\omega_2\right)+\Phi_{00}\left(\frac{2-k}{k}\,\omega_2\right)+\ldots.+\Phi_{00}\left(-\frac{\omega_2}{k}\right)$$
$$+\Phi_{00}=\Phi_{00}\left(0,\frac{\omega_2}{k}\right)$$

mit Benutzung der Formel

$$1+\sum_{\lambda=0}^{k-1}\cos\lambda\,m\,\alpha\cdot\cos\lambda\,n\,\alpha=0,$$

welche gültig ist für $n=1,\ 2,\ldots.k-1$, die zwei Zahlen m und $k-m$ ausgenommen, für welche die Summe $\frac{1}{2}k$ ist, daraus erhalten wir

$$\frac{1}{2}k\left[\Phi_{00}\left(-\frac{m\,\omega_2}{k}\right)+\Phi_{00}\left(-\frac{k-m}{k}\,\omega_2\right)\right]$$
$$=\Phi_{00}\left(0,\frac{\omega_2}{k}\right)+\sum_{\mu=1}^{k-1}\cos(\mu\,m\,\alpha)\cdot X(\mu\,\alpha),$$

wo $X(\mu\,\alpha)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{\lambda}{k}}}{1-q^{\frac{\lambda}{k}}}\cos\lambda\,\mu\,\alpha$, und $\alpha=\frac{2\pi}{k}$ sind.

Auf die Existenz einer derartigen Formel weist Heine d. c. S. 115 hin, ohne sie auszuführen.

Aber die Funktion $X(\mu\,\alpha)$ lässt sich durch Φ-Funktionen darstellen. Aus Formel (14a) bekommen wir

$$\frac{1}{2}\left[\Phi_{00}\left(z,\frac{\omega_2}{k}\right)+\Phi_{00}\left(-z,\frac{\omega_2}{k}\right)\right]=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{\lambda}{k}}}{1-q^{\frac{\lambda}{k}}}\cos\lambda\,\frac{2\pi z}{\omega_1}.$$

Wenn wir $z=\frac{\mu\,\omega_1}{k}$ und $\alpha=\frac{2\pi}{k}$ setzen, wird die rechte Seite dieser Gleichung $\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{\lambda}{k}}}{1-q^{\frac{\lambda}{k}}}\cos\lambda\,\mu\,\alpha$, welche gerade $X(\mu\,\alpha)$ ist.

Dann ist

$$X(\mu\,\alpha)=\frac{1}{2}\left[\Phi_{00}\left(\frac{\mu\,\omega_1}{k},\frac{\omega_2}{k}\right)+\Phi_{00}\left(-\frac{\mu\,\omega_1}{k},\frac{\omega_2}{k}\right)\right]$$

und setzen diese Werte in die obige Gleichung ein, so bekommen wir

$$\Phi_{00}\left(-\frac{m\,\omega_2}{k}\right)+\Phi_{00}\left(-\frac{k-m}{k}\,\omega_2\right)=\frac{2}{k}\,\Phi_{00}\left(0,\frac{\omega_2}{k}\right)$$
$$+\frac{1}{k}\sum_{\mu=1}^{k-1}\left[\Phi_{00}\left(\frac{\mu\,\omega_1}{k},\frac{\omega_2}{k}\right)+\Phi_{00}\left(-\frac{\mu\,\omega_1}{k},\frac{\omega_2}{k}\right)\right]\cos\frac{2\,m\,\mu\,\pi}{k}.$$

Aber das Glied $\frac{2}{k}\,\Phi_{00}\left(0,\frac{\omega_2}{k}\right)$ ist gerade der Wert der letzten Summe für $\mu=0$; daher können wir schreiben

$$\Phi_{00}\left(-\frac{m\,\omega_2}{k}\right)+\Phi_{00}\left(-\frac{k-m}{k}\,\omega_2\right)$$
$$=\frac{1}{k}\sum_{0}^{k-1}\left[\Phi_{00}\left(\frac{\mu\,\omega_1}{k},\frac{\omega_2}{k}\right)+\Phi_{00}\left(-\frac{\mu\,\omega_1}{k},\frac{\omega_2}{k}\right)\right]\cos\frac{2\,\mu\,m\,\pi}{k}.$$

Ausserdem folgt aus Formel (24a)

$$\Phi_{00}\left(\frac{\mu\,\omega_1}{k},\frac{\omega_2}{k}\right)=\sum_{\nu=0}^{k-1}\Phi_{00}\left(\frac{\mu\,\omega_1-\nu\,\omega_2}{k}\right)$$

und schliesslich

$$\Phi_{00}\left(-\frac{m\,\omega_2}{k}\right)+\Phi_{00}\left(-\frac{k-m}{k}\,\omega_2\right) \tag{28}$$
$$=\frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left[\Phi_{00}\left(\frac{\mu\,\omega_1-\nu\,\omega_2}{k}\right)+\Phi_{00}\left(-\frac{\mu\,\omega_1+\nu\,\omega_2}{k}\right)\right]\cos\frac{2\,\mu\,m\,\pi}{k}.$$

Zur Prüfung dieses Ergebnisses setzen wir $m=1$ und $k=2$. Es wird, weil $\Phi_{00}\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)=\Phi_{00}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $2\,\Phi_{00}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)=\Phi_{00}+\Phi_{00}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)-\Phi_{00}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)-\Phi_{00}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)$ oder $\Phi_{01}=\Phi_{00}-\Phi_{10}-\Phi_{11}$, was dasselbe ist wie (27).

Ebenso wird die Gleichung, wenn $m=1$ und $k=4$ ist: $\Phi_{00}\left(-\frac{\omega_2}{4}\right)+\Phi_{00}\left(-\frac{3\,\omega_2}{4}\right)+\Phi_{00}\left(\frac{2\,\omega_1-\omega_2}{4}\right)+\Phi_{00}\left(\frac{2\,\omega_1-3\,\omega_2}{4}\right)=\Phi_{00}+\Phi_{01}-\Phi_{10}-\Phi_{11}$ oder $\Phi_{00}\left(-\frac{\omega_2}{4}\right)+\Phi_{10}\left(-\frac{\omega_2}{4}\right)+\Phi_{01}\left(-\frac{\omega_2}{4}\right)+\Phi_{11}\left(-\frac{\omega_2}{4}\right)=2\,\Phi_{01}$. Aber die linke Seite ist $2\,\Phi_{00}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)$ aus Formel (26), und aus Formel (13) $\Phi_{00}\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)=\Phi_{01}$.

Für diese einfachen Werte von m und k verwandelt sich also die Gleichung (28) in Formeln, welche wir schon gefunden haben.

Neue Ergebnisse erhalten wir mit anderen Werten dieser Grössen.

§ 21. Zweite Darstellung der O-Funktionen durch unendliche Produkte.

Vermöge des Weierstrasschen Satzes lässt sich $O(z)$ auch in anderer Weise durch ein unendliches Produkt darstellen. Sie hat Nullstellen in den Punkten.

$$z = \left(n_1 - \frac{a_1}{2}\right)\omega_1 - \left(n_2 - \frac{a_2}{2}\right)\omega_2$$

$$n_1 = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n_2 = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Daraus folgt nach dem Weierstrasschen Satze, dass

$$O(z) = e^{g(z)} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\Omega^1}\right) e^{\frac{z}{\Omega^1} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega^1}\right)^2}$$

wo $\Omega^1 = \mu_1 \omega_1 - \mu_2 \omega_2$,

$$\mu_1 = n_1 - \frac{a_1}{2} \text{ und } \mu_2 = n_2 - \frac{a_2}{2}$$

$$n_1 = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n_2 = 1, 2, 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die ganze Funktion $g(z)$ wollen wir durch wirkliche Multiplikation der Faktoren bestimmen. Zu diesem Zwecke nehmen wir erst an, dass μ_2 eine Konstante ist und finden so das Produkt der Faktoren für $\mu_1 = -\infty$ bis $+\infty$. Wenn $\mu_1 = 0$ ist, so hat der Faktor die Form

$$\frac{\mu_2 \omega_2 + \frac{a_1}{2}\omega_1 + z}{\mu_2 \omega_2 + \frac{a_1}{2}\omega_1} e^{-\frac{z}{\mu_2 \omega_2 + \frac{a_1}{2}\omega_1}}.$$

Dann können wir für jeden beliebigen Wert von μ_2 das Produkt $\prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\Omega^1}\right) e^{\frac{z}{\Omega^1}}$ in der Form schreiben:

$$\frac{\mu_2\omega_2+\frac{a_1}{2}\omega_1+z}{\mu_2\omega_2+\frac{a_1}{2}\omega_1}\prod_{n_1=-\infty}^{+\infty\prime}\left(1-\frac{z+\frac{a_1}{2}\omega_1+\mu_2\omega_2}{n_1\omega_1}\right)e^{\frac{z+\mu_2\omega_2+\frac{a_1\omega_1}{2}}{n_1\omega_1}}\Bigg/\left(1-\frac{\frac{a_1}{2}\omega_1+\mu_2\omega_2}{n_1\omega_1}\right)e^{\frac{\mu_2\omega_2+\frac{a_1\omega_1}{2}}{n_1\omega_1}}\;e^{f(z)}$$

wo $f(z)=-\dfrac{z}{\mu_2\omega_2+\frac{a_1}{2}\omega_1}+\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty\prime}\left[\dfrac{z}{\mu_1\omega_1-\mu_2\omega_2}-\dfrac{z}{n_1\omega_1}\right]$.

Aber jeder der drei Teile dieses Produkts, Zähler, Nenner und Exponentialfaktor konvergiert absolut; wir können es also in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{\omega_1}\left(z+\frac{a_1}{2}\omega_1+\mu_2\omega_2\right)}{\sin\frac{\pi}{\omega_1}\left(\frac{a_1}{2}\omega_1+\mu_2\omega_2\right)}\,e^{-\frac{\pi z}{\omega_1}\cot\frac{\pi}{\omega_1}\left(\mu_2\omega_2+\frac{a_1}{2}\omega_1\right)}.$$

Jetzt ist nur noch das Produkt für $n_2=1$ bis ∞ zu finden. Zu diesem Zweck setzen wir $\sin z=\dfrac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i}$ und bekommen

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\Omega_1}\right)e^{\frac{z}{\Omega_1}}=\prod_{1}^{\infty}\frac{1-e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z+\frac{a_1}{2}\omega_1-\frac{a_2}{2}\omega_2+n_2\omega_2\right)}}{1-e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(\frac{a_1}{2}\omega_1-\frac{a_2}{2}\omega_2+n_2\omega_2\right)}}\,e^{f(z)}$$

wobei $f(z)=-\dfrac{\pi z}{\omega_1}\left(i+\cot\dfrac{\pi}{\omega_1}\left(n_2\omega_2+\dfrac{a_1}{2}\omega_1-\dfrac{a_2}{2}\omega_2\right)\right)$.

Hier konvergieren ebenfalls Zähler, Nenner und Exponentialfaktor absolut, weil der Zähler $O_{a_1a_2}(z)$, der Nenner $O_{a_1a_2}$ und der Exponentialfaktor aus (15) gerade $e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}z\Phi_{a_1a_2}}$ ist.

Dann ist $\dfrac{O_{a_1a_2}(z)}{O_{a_1a_2}}=e^{-\frac{2\pi i}{\omega_1}z\Phi_{a_1a_2}}\prod\left(1-\dfrac{z}{\Omega^1}\right)e^{\frac{z}{\Omega^1}}$ wenn man in der obigen Reihenfolge die Faktoren des unendlichen Produkts multipliziert. Aber die Faktoren dieses Produkts können nicht beliebig umgestellt werden, ohne den Wert des Produkts zu ändern weil das Produkt nicht absolut konvergiert. Das Produkt konvergiert nur absolut, wenn es den anderen Faktor $e^{\frac{1}{2}\left[\frac{z}{\Omega^1}\right]^2}$, enthält.

Folgt man der obigen Ordnung, so muss die Reihe

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \overset{+}{\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}} \left(\frac{z}{\mu_1 \omega_1 - \mu_2 \omega_2}\right)^2$$

konvergieren, und in der Tat können wir seinen Wert durch die Entwicklung der Φ-Funktion in trigonometrische Reihen finden. Durch Umformung und Benutzung einer wohl bekannten Formel ist

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\mu_1 \omega_1 - \mu_2 \omega_2)^2} = \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_1^2} \overset{+}{\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}} \frac{1}{\left(-\mu_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{a_1}{2} + n_1\right)^2}$$

$$= \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{\omega_1^2 \sin^2 \pi \left(\mu_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{a_1}{2}\right)}.$$

Aber wir haben in § 15 gezeigt, dass

$$\Phi'_{a_1 a_2}(z) = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_1 \sin^2 \frac{\pi}{\omega_1}\left(z + n\omega_2 + \frac{a_1 \omega_1 - a_2 \omega_2}{2}\right)}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \overset{+}{\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}} \frac{1}{(\mu_1 \omega_1 - \mu_2 \omega_2)^2} = \frac{2\pi i}{\omega_1} \Phi'_{a_1 a_2}.$$

Jetzt kann das Ergebnis in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\frac{O_{a_1 a_2}(z)}{\bar{O}_{a_1 a_2}} = e^{-\frac{2\pi i}{\omega_1}\left[z \Phi_{a_1 a_2} + \frac{1}{2} z^2 \Phi'_{a_1 a_2}\right]} \prod \left(1 - \frac{z}{\Omega^1}\right) e^{\frac{z}{\Omega^1} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega^1}\right)^2}$$

(29) wobei $\Omega^1 = \left(n_1 - \frac{a_1}{2}\right)\omega_1 - \left(n_2 - \frac{a_2}{2}\right)\omega_2$

und $n_1 = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots\ldots$

$n_2 = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots$

Differentiert:

(30) $$\Phi_{a_1 a_2}(z) = \Phi_{a_1 a_2} + z \Phi'_{a_1 a_2} - \frac{\omega_1}{2\pi i} \Sigma \left[\frac{1}{\Omega^1} + \frac{z}{\Omega^{1^2}} + \frac{1}{z - \Omega^1}\right]$$

(31) $$\Phi'_{a_1 a_2}(z) = \Phi'_{a_1 a_2} + \frac{\omega_1}{2\pi i} \Sigma \left[\frac{1}{(z - \Omega^1)^2} - \frac{1}{\Omega^{1^2}}\right].$$

§ 22.

Aus der Darstellung der O-Funktion durch ein unendliches Produkt kann man auch andere Beziehungen zwischen O-Funktionen finden, welche ähnlich den Formeln für die σ-Funktion sind.

Nehmen wir an, dass s jede beliebige Grösse abgesehen von Ω^1 sei, dann ist

$$O_{a_1 a_2}(z+s) = O_{a_1 a_2}\, e^{-\frac{2\pi i}{\omega_1}\left[(z+s)\,\Phi_{a_1 a_2} + \frac{1}{2}(z+s)^2\,\Phi_{a_1 a_2}\right]} \overline{\Big|\Big|}\left(1-\frac{z+s}{\Omega^1}\right) e^{\frac{z+s}{\Omega^1}+\frac{1}{2}\left(\frac{z+s}{\Omega^1}\right)^2}$$

$$\Omega^1 = \left(n_1 - \frac{a_1}{2}\right)\omega_1 - \left(n_2 - \frac{a_2}{2}\right)\omega_2$$

$$n_1 = 0 \pm 1 \ldots\ldots; \quad n_2 = 1,\ 2 \ldots\ldots$$

Jetzt können wir den Ausdruck nach dem Zeichen $\overline{||}$ als das Produkt der drei Grössen betrachten:

$$\left(1-\frac{z}{\Omega^1 - s}\right) e^{\frac{z}{\Omega^1 - s}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega^1 - s}\right)^2}$$

$$\left(1-\frac{s}{\Omega^1}\right) e^{\frac{s}{\Omega^1}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\Omega^1}\right)^2}$$

$$e^{z\left[\frac{1}{s-\Omega^1}+\frac{1}{\Omega^1}+\frac{s}{\Omega^{1\,2}}\right] - \frac{z^2}{2}\left[\frac{1}{(s-\Omega^1)^2}-\frac{1}{\Omega^{1\,2}}\right]}.$$

Aber jedes der drei unendlichen Produkte, welches diese Grössen als Faktoren hat, konvergiert absolut und also können wir das gegebene Produkt als Produkt von drei unendlichen Produkten schreiben. Jetzt haben wir vermöge der Formeln (30), (31) und (29)

$$z\sum\frac{1}{s-\Omega^1}+\frac{1}{\Omega^1}+\frac{s}{\Omega^{1\,2}} = -\frac{2\pi i}{\omega_1}\left[z\,\Phi(s) - z\,\Phi - z\,s\,\Phi'\right]$$

$$\frac{z^2}{2}\sum\left(\frac{1}{(s-\Omega^1)^2}-\frac{1}{\Omega^{1\,2}}\right) = \frac{2\pi i}{\omega_1}\left[\frac{z^2}{2}\,\Phi'(s) - \frac{z^2}{2}\,\Phi'\right]$$

$$O\cdot\overline{\Big|\Big|}\left(1-\frac{s}{\Omega^1}\right) e^{\frac{s}{\Omega^1}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\Omega^1}\right)^2} = e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left[s\,\Phi + \frac{1}{2}s^2\,\Phi'\right]}\,O(s).$$

Führen wir diese Werte in die obige Gleichung für $O_{a_1 a_2}(z+s)$ ein, so bekommen wir

$$\frac{O_{a_1 a_2}(z+s)}{O_{a_1 a_2}(s)}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}\left[z\,\Phi_{a_1 a_2}(s) + \frac{z^2}{2}\,\Phi'_{a_1 a_2}(s)\right]} \tag{32}$$

$$= \overline{\Big|\Big|}\left(1-\frac{z}{\Omega^1 - s}\right) e^{\frac{z}{\Omega^1 - s}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega^1 - s}\right)^2}.$$

Differentiert:

$$(33)\qquad \Phi_{a_1 a_2}(z+s) - \Phi_{a_1 a_2}(s) - z\,\Phi'_{a_1 a_2}(s) = -\frac{\omega_1}{2\pi i}\sum\left[\frac{1}{z+s-\Omega^1} - \frac{1}{s-\Omega^1} + \frac{z}{(s-\Omega^1)^2}\right].$$

$$(34)\qquad \Phi'_{a_1 a_2}(z+s) - \Phi'_{a_1 a_2}(s) = \frac{\omega_1}{2\pi i}\sum\left[\frac{1}{(z+s-\Omega^1)^2} - \frac{1}{(s-\Omega^1)^2}\right].$$

§ 23. Darstellung der Θ-Funktion durch Γ-Funktionen.

Weil das unendliche Produkt $\prod\left(1-\frac{z}{\Omega^1}\right)e^{\frac{z}{\Omega^1}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega^1}\right)^2}$ absolut konvergiert, lassen sich seine Faktoren so umformen:

$$\prod_{n_1=-\infty}^{+\infty}\prod_{n_2=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\Omega^1}\right)e^{\frac{z}{\Omega^1}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega^1}\right)^2}$$

$$\Omega^1 = \left(n_1 - \frac{a_1}{2}\right)\omega_1 - \left(n_2 - \frac{a_2}{2}\right)\omega_2.$$

Jetzt können wir das Produkt $\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{\Omega^1}\right)e^{\frac{z}{\Omega^1}}$ so schreiben

$$\frac{e^{\frac{\gamma}{\omega_2}\left(z-\mu_1\omega_2-\frac{a_2\omega_2}{2}\right)}}{e^{\frac{\gamma}{\omega_2}\left(-\mu_1\omega_1-\frac{a_2\omega_2}{2}\right)}}e^{f(z)}$$

$$\prod_{n_2}^{\infty}\left(1+\frac{z-\mu_1\omega_1-\frac{a_2\omega_2}{2}}{n_2\omega_2}\right)e^{-\frac{z-\mu_1\omega_1-\frac{a_2\omega_2}{2}}{n_2\omega_2}}$$

$$\prod_1^{n_2}\left(1+\frac{-\mu_1\omega_1-\frac{a_2\omega_2}{2}}{n_2\omega_2}\right)e^{\frac{\mu_1\omega_1+\frac{a_2}{2}\omega_2}{n_2\omega_2}}$$

$$\text{wo } f(z) = -\frac{z}{\omega_2}\left[\gamma + \sum_{n_2=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n_2 - \frac{a_2}{2} - \mu_1\frac{\omega_1}{\omega_2}} - \frac{1}{n_2}\right)\right].$$

Es ist aber $\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma z}\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \psi(z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)$$

und $$\psi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Also konvergiert jeder der drei Teile dieses Produktes Zähler, Nenner und Exponentialfaktor absolut und wir können es in der folgenden Form schreiben:

$$\prod_{n_2=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\Omega^1}\right) e^{\frac{z}{\Omega^1}}$$

$$= e^{\frac{z}{\omega_2}\psi\left[\left(\frac{a_1}{2} - n_1\right)\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{a_2}{2}\right]} \frac{\Gamma\left[1 - \left(n_1 - \frac{a_1}{2}\right)\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{a_2}{2}\right]}{\Gamma\left[1 + \frac{z}{\omega_2} - \left(n_1 - \frac{a_1}{2}\right)\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{a_2}{2}\right]}$$

Setzen wir $\frac{a_1}{2}\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{a_2}{2} = \alpha$, so ist

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega^{1^2}} = \frac{1}{{\omega_2}^2} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{\left(-n_1\frac{\omega_1}{\omega_2} + \alpha + n_2\right)^2} = \frac{1}{{\omega_2}^2}\psi'\left(\alpha - n_1\frac{\omega_1}{\omega_2}\right).$$

Schliesslich ist

$$(35)\quad O_{a_1 a_2}(z) = O_{a_1 a_2} \cdot e^{f_1(z)} \prod_{-\infty}^{\infty}{}' e^{f_2(z)} \frac{\Gamma\left(1 + \alpha + n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{z}{\omega_2} + \alpha + n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)},$$

wobei $$f_1(z) = -\frac{2\pi i}{\omega_1}\left(z\,\Phi_{a_1 a_2} + \frac{1}{2}z^2\,\Phi'_{a_1 a_2}\right)$$

und $$f_2(z) = \frac{z}{\omega_2}\psi\left(\alpha + n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) + \frac{z^2}{2\,{\omega_2}^2}\psi'\left(\alpha + n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right).$$

Nach dem Weierstrasschen Satz konvergiert das unendliche Produkt absolut.

Differentiert ergibt dasselbe

$$(36)\quad \Phi_{a_1 a_2}(z) = \Phi_{a_1 a_2} + z\,\Phi'_{a_1 a_2} + \frac{\omega_1}{2\pi i\,\omega_2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\psi\left(\frac{z}{\omega_2} + \alpha + n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) - \psi\left(\alpha + n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) - \frac{z}{\omega_2}\psi'\left(\alpha + n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\right].$$

$$(37)\quad \Phi'_{a_1 a_2}(z) - \Phi'_{a_1 a_2}$$

$$= \frac{\omega_1}{2\pi i\,{\omega_2}^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\psi'\left(\frac{z}{\omega_2} + \alpha + n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) - \psi'\left(\alpha + n\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\right].$$

§ 24. Anwendungen der Θ-Funktion auf die elliptischen Funktionen.

Nehmen wir an, dass man die elliptischen Funktionen $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ in der gewöhnlichen Weise definiert und aus dieser Definition die Additionstheoreme gefunden habe. Dann ist es leicht zu beweisen, dass diese Funktionen doppelperiodisch sind mit den Perioden $4K$ und $4iK'$ oder Bruchteilen dieser Werte; weiter dass jede Funktion unendlich ist in den Punkten

$$2\mu K + (2\nu + 1) i K' \left[\begin{matrix}\mu = \\ \nu =\end{matrix} 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots\ldots\right]$$

und dass

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn}[2\mu K + 2\nu i K'] = 0 && \text{und } \operatorname{sn} K = 1 \\ &\operatorname{cn}[(2\mu + 1) K + 2\nu i K'] = 0 && \text{„ } \operatorname{cn} 2K = -1 \\ &\operatorname{dn}[(2\mu + 1) K + (2\nu + 1) i K'] = 0 && \text{„ } \operatorname{dn} 2K = 1. \end{aligned}$$

Jede Funktion, welche dieselben Perioden, Pole und Nullpunkte wie eine gegebene Funktion hat, muss, von einem konstanten Faktor abgesehen, gleich und, wenn sie auch noch der letzten Bedingung genügt, identisch mit derselben sein. Also sind diese Bedingungen hinreichend, die Funktion vollständig zu bestimmen.

Aus den Θ-Funktionen, deren ω_1 gleich K und ω_2 gleich iK' ist, bilden wir die vier Produkte:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \Theta_{01}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{01}\left(-\frac{z}{2}\right), \\ F_2(z) &= \Theta_{11}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{11}\left(-\frac{z}{2}\right), \\ F_3(z) &= \Theta_{00}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{00}\left(-\frac{z}{2}\right) \sin\frac{\pi z}{2K}, \\ F_4(z) &= \Theta_{10}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{10}\left(-\frac{z}{2}\right) \cos\frac{\pi z}{2K}. \end{aligned}$$

Selbstverständlich ist jedes dieser Produkte periodisch mit einer Periode $4K$ oder $2K$. Auch genügen sie den folgenden Funktionalgleichungen:

$$\begin{aligned} F_1(z + 2iK') &= -q^{-\frac{z}{2iK'} - \frac{1}{2}} F_1(z), \\ F_2(z + 2iK') &= q^{-\frac{z}{2iK'} - \frac{1}{2}} F_2(z), \\ F_3(z + 2iK') &= -q^{-\frac{z}{2iK'} - \frac{1}{2}} F_3(z), \\ F_4(z + 2iK') &= q^{-\frac{z}{2iK'} - \frac{1}{2}} F_4(z), \quad \text{wobei } q = e^{-\frac{2\pi K'}{K}}. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Gleichungen kann man die Funktionen F_1, F_2, F_3, F_4 für die elliptischen Funktionen ebenso benutzen wie die Jacobischen ϑ-Funktionen, was im folgenden ausgeführt werden möge. Die Funktionalgleichungen für $F_1(z)$ und $F_2(z)$ erhielten wir schon in § 7 und die Gleichungen für $F_3(z)$ und $F_4(z)$ lassen sich ähnlich beweisen. Selbstverständlich haben die Verhältnisse $\frac{F_1(z)}{F_3(z)}$ und $\frac{F_2(z)}{F_4(z)}$ die Periode $2iK'$ und im allgemeinen hat das Verhältnis von zwei beliebigen F-Funktionen die Periode $4iK'$ oder die Hälfte derselben. Also genügt jedes Verhältnis zweier F-Funktionen der ersten Bedingung der elliptischen Funktionen.

Jetzt müssen wir die Nullpunkte der F-Funktionen finden. Aus § 2 sehen wir, dass die Nullpunkte jeder beliebigen O Funktion

$$z = \left(n_1 - \frac{a_1}{2}\right)\omega_1 - \left(n_2 - \frac{a_2}{2}\right)\omega_2 \text{ sind}$$

wo $n_1 = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$
und $n_2 = 1, 2, 3 \ldots\ldots$

Daraus können wir leicht zeigen, dass

$$\left.\begin{aligned} &F_1[2\mu K + (2\nu+1)iK'] = 0,\\ &F_2[(2\mu+1)K + (2\nu+1)iK'] = 0,\\ &F_3[2\mu K + 2\nu iK'] = 0,\\ &F_4[(2\mu+1)K + 2\nu iK'] = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots\\ &\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots \end{aligned}$$

Aber wir müssen Funktionen bilden, welche in den Punkten $2\mu K + (2\nu+1)iK'$ unendlich sind. Also muss $F_1(z)$ der Nenner jedes Verhältnisses sein. Auch hat $F_3(z)$ dieselben Nullpunkte wie $\operatorname{sn} z$, $F_4(z)$ wie $\operatorname{cn} z$ und $F_2(z)$ wie $\operatorname{dn} z$. Daraus folgt

$$\operatorname{sn} z = M_1 \frac{F_3(z)}{F_1(z)} = M_1 \frac{O_{00}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot O_{00}\left(-\frac{z}{2}\right) \cdot \sin \frac{\pi z}{2K}}{O_{01}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot O_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)},$$

$$\operatorname{cn} z = M_2 \frac{F_4(z)}{F_1(z)} = M_2 \frac{O_{10}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot O_{10}\left(-\frac{z}{2}\right) \cos \frac{\pi z}{2K}}{O_{01}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot O_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)},$$

$$\operatorname{dn} z = M_3 \frac{F_2(z)}{F_1(z)} = M_3 \frac{O_{11}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot O_{11}\left(-\frac{z}{2}\right)}{O_{01}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot O_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)}.$$

Wenn wir die dritte Bedingung benutzen, können wir die Werte der Grössen M_1, M_2, M_3 erhalten.

Weil $\operatorname{sn} K = 1$ ist, folgt daraus

$$M_1 \frac{\Theta_{00}\left(\frac{K}{2}\right) \cdot \Theta_{00}\left(-\frac{K}{2}\right)}{\Theta_{01}\left(\frac{K}{2}\right) \cdot \Theta_{01}\left(-\frac{K}{2}\right)} = 1.$$

Aber aus Formel (4) ist $\Theta_{00}\left(\frac{K}{2}\right) = \Theta_{00}\left(-\frac{K}{2}\right) = \Theta_{10}$

und $\Theta_{01}\left(\frac{K}{2}\right) = \Theta_{01}\left(-\frac{K}{2}\right) = \Theta_{11}$,

dann ist $M_1 = \frac{\Theta_{11}^2}{\Theta_{10}^2}$.

Weil $\operatorname{cn} 2K = -1$ ist, $M_2 \frac{\Theta_{10}(K) \cdot \Theta_{10}(-K)}{\Theta_{01}(K) \cdot \Theta_{01}(-K)} = M_2 \frac{\Theta_{10}^2}{\Theta_{01}^2} = 1$

und $M_2 = \frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{10}^2}$ ist.

Auf die nämliche Weise ist $M_3 = \frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{11}^2}$.

Schliesslich stellen wir die elliptischen Funktionen von Jacobi durch Θ-Funktionen dar

$$(38) \qquad \operatorname{sn} z = \frac{\Theta_{11}^2}{\Theta_{10}^2} \frac{\Theta_{00}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{00}\left(-\frac{z}{2}\right) \sin \frac{\pi z}{2K}}{\Theta_{01}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)}$$

$$= \frac{i\,\Theta_{11}^2\, \Theta_{00}\left(\frac{z}{2} - iK'\right) \Theta_{00}\left(-\frac{z}{2}\right) \cdot e^{-\frac{\pi z i}{2K}}}{2\,\Theta_{10}^2\, \Theta_{01}\left(\frac{z}{2}\right) \Theta_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)}$$

$$(39) \qquad \operatorname{cn} z = \frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{10}^2} \frac{\Theta_{10}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{10}\left(-\frac{z}{2}\right) \cos \frac{\pi z}{2K}}{\Theta_{01}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Theta_{01}^2\, \Theta_{10}\left(\frac{z}{2} - iK'\right) \cdot \Theta_{10}\left(-\frac{z}{2}\right) \cdot e^{-\frac{\pi z i}{2K}}}{2\,\Theta_{10}^2\, \Theta_{01}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)}$$

$$(40) \qquad \operatorname{dn} z = \frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{11}^2} \frac{\Theta_{11}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{11}\left(-\frac{z}{2}\right)}{\Theta_{01}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \Theta_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)}$$

wobei $\omega_1 = K$ und $\omega_2 = iK'$.

§ 25. **Werte der Konstanten k, k' und K.**

In dem letzten Abschnitt haben wir die elliptischen Funktionen durch Θ-Funktionen dargestellt. Jetzt wollen wir auch in Θ-Funktionen ausgedrückt die Werte der Konstanten k, k' und K aus ihren Definitionen und den obigen Ergebnissen erhalten.

Laut Definition ist $\operatorname{dn} K = \sqrt{1 - k^2} = k'$. Ersetzen wir z durch K in (40)

$$k' = \frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{11}^2} \frac{\Theta_{11}\left(\frac{K}{2}\right) \Theta_{11}\left(-\frac{K}{2}\right)}{\Theta_{01}\left(\frac{K}{2}\right) \Theta_{01}\left(-\frac{K}{2}\right)}.$$

Aber $\Theta_{11}\left(\frac{K}{2}\right) = \Theta_{11}\left(-\frac{K}{2}\right) = \Theta_{01}$ und $\Theta_{01}\left(\frac{K}{2}\right) = \Theta_{01}\left(-\frac{K}{2}\right) = \Theta_{11}$.

Dann ist

$$(41) \qquad k' = \frac{\Theta_{01}^4}{\Theta_{11}^4}.$$

Wir haben auch vorausgesetzt, dass das Additionstheorem

$$\operatorname{sn}(x+y) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y + \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y}$$

bekannt ist.

Setzt man $x = \frac{iK'}{2}$ und $y = \frac{iK'}{2}$, so ist $\operatorname{sn} iK' = \infty$ und der Zähler der rechten Seite endlich. Dann muss der Nenner Null sein.

Also ist $1 - k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{iK'}{2} = 0$, oder

$$k^2 = \frac{1}{\operatorname{sn}^4 \frac{iK'}{2}} = \frac{\Theta_{10}^8}{\Theta_{11}^8} \left[\frac{\Theta_{01}\left(\frac{iK'}{4}\right) \Theta_{01}\left(-\frac{iK'}{4}\right)}{\Theta_{00}\left(\frac{iK'}{4}\right) \Theta_{00}\left(-\frac{iK'}{4}\right) \sin \frac{\pi i K'}{4K}} \right]^4.$$

Aber aus (3) ist $\Theta_{01}\left(-\frac{\omega_2}{4}\right) = \left(1 - e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}}\right)\Theta_{00}\left(\frac{\omega_2}{4}\right)$

und $\Theta_{00}\left(-\frac{\omega_2}{4}\right) = \Theta_{01}\left(\frac{\omega_2}{4}\right)$.

Also ist der in der Klammer stehende Ausdruck gleich $-2ie^{-\frac{\pi K'}{4K}}$. Dann ist

$$k^2 = \frac{\Theta_{10}^8}{\Theta_{11}^8}\left(16\, e^{\frac{\pi K'}{K}}\right) = 16\sqrt{q}\,\frac{\Theta_{10}^8}{\Theta_{11}^8}, \text{ und}$$

$$k = 4\sqrt[4]{q}\,\frac{\Theta_{10}^4}{\Theta_{11}^4}. \tag{42}$$

Den Wert von K erhalten wir durch die Formel $\frac{d\,sn\,z}{d\,z} = cn\,z\,dn\,z$, welche leicht aus der Definition gefunden werden kann. Nehmen wir die Ableitung der Gleichung (38), so bekommen wir

$$\frac{d\,sn\,z}{d\,z} = \frac{\Theta_{11}^2}{\Theta_{10}^2}\,\frac{\Theta_{00}\left(\frac{z}{2}\right)\Theta_{00}\left(-\frac{z}{2}\right)}{\Theta_{01}\left(\frac{z}{2}\right)\Theta_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)}\cdot\frac{\pi i}{K}\left[-\Phi_{00}\left(\frac{z}{2}\right)+\Phi_{00}\left(-\frac{z}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2i}\cos\frac{\pi z}{2K}-\Phi_{01}\left(\frac{z}{2}\right)+\Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)\right] = cn\,z\,dn\,z.$$

Wenn wir $z = 2K$ setzen, so ist $cn\,2K = 1$ und $dn\,2K = 1$ und weil $\Phi(-K) = \Phi(K)$ ist, wird die Klammer $-\frac{1}{2i}$. Dann ist $\frac{\Theta_{11}^2}{\Theta_{10}^2}\,\frac{\Theta_{00}^2}{\Theta_{01}^2}\,\frac{\pi i}{K}\left(-\frac{1}{2i}\right) = -1$ und schliesslich

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{\Theta_{11}^2\,\Theta_{00}^2}{\Theta_{10}^2\,\Theta_{01}^2} = \Theta_{11}^4\,\Theta_{00}^2. \tag{43}$$

Verbindet man die Werte von k, k' und K', so entstehen die folgenden Formeln:

$$\frac{2k'K}{\pi} = \frac{\Theta_{00}^2\,\Theta_{01}^2}{\Theta_{10}^2\,\Theta_{11}^2} = \frac{\Theta_{00}^2\left(0,\frac{\omega_2}{2}\right)}{\Theta_{10}^2\left(0,\frac{\omega_2}{2}\right)},$$

$$\frac{\sqrt{k}\,K}{\pi} = \sqrt[8]{q}\,\frac{\Theta_{00}^2}{\Theta_{01}^2}, \quad \frac{2\sqrt{k'}\,K}{\pi} = \frac{\Theta_{00}^2}{\Theta_{10}^2},$$

$$\frac{\Theta_{11}^2}{\Theta_{10}^2} = \frac{2\sqrt[8]{q}}{\sqrt{k}}, \quad \frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{11}^2} = \sqrt{k'}, \quad \frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{10}^2} = 2\sqrt[8]{q}\,\sqrt{\frac{k'}{k}}.$$

Aus den letzten drei Formeln sehen wir, dass $\frac{2\sqrt[8]{q}}{\sqrt{k}}$, $2\sqrt[8]{q}\sqrt{\frac{k'}{k}}$, und $\sqrt{k'}$ als Koeffizienten in $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$ und $\operatorname{dn} z$ respektive benutzt werden können.

§ 26. Beziehungen zwischen den Θ- und Φ-Funktionen.

Aus den Formeln (38), (39) und (40) können wir Beziehungen zwischen den Θ- und Φ-Funktionen finden. Weil

$$\frac{d \log \operatorname{sn} z}{dz} = \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}, \quad \omega_1 = K \text{ und } \omega_2 = iK'$$

ist, so bekommen wir

$$(44)\quad \frac{\pi i}{\omega_1}[\Phi_{01}(z) - \Phi_{01}(-z) - \Phi_{00}(z) + \Phi_{00}(-z)] + \frac{\pi}{2\omega_1}\cot\frac{\pi z}{\omega_1}$$
$$= \frac{\Theta_{01}^4}{\Theta_{11}^4}\frac{\Theta_{10}(z)\cdot\Theta_{10}(-z)\,\Theta_{11}(z)\,\Theta_{11}(-z)}{\Theta_{00}(z)\,\Theta_{00}(-z)\,\Theta_{01}(z)\,\Theta_{01}(-z)}\cot\frac{\pi z}{\omega_1}$$
$$= \frac{\Theta_{01}^4\,\Theta_{10}\left(z,\frac{\omega_2}{2}\right)\Theta_{10}\left(-z,\frac{\omega_2}{2}\right)}{\Theta_{11}^4\,\Theta_{00}\left(z,\frac{\omega_2}{2}\right)\Theta_{00}\left(-z,\frac{\omega_2}{2}\right)}\cot\frac{\pi z}{\omega_1}.$$

Auch ist $\frac{d \log \operatorname{cn} z}{dz} = -\frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z}$, und daraus folgt

$$(45)\quad \frac{\pi i}{\omega_1}[\Phi_{01}(z) - \Phi_{01}(-z) - \Phi_{10}(z) + \Phi_{10}(-z)] - \frac{\pi}{2\omega_1}\tan\frac{\pi z}{\omega_1}$$
$$= \frac{\Theta_{00}(z)\,\Theta_{00}(-z)\,\Theta_{11}(z)\,\Theta_{11}(-z)}{\Theta_{10}(z)\,\Theta_{10}(-z)\,\Theta_{01}(z)\,\Theta_{01}(-z)}\tan\frac{\pi z}{\omega_1}.$$

Schliesslich ist $\frac{d \log \operatorname{dn} z}{dz} = -k^2\frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}$, und

$$(46)\quad \frac{\pi i}{\omega_1}[\Phi_{01}(z) - \Phi_{01}(-z) - \Phi_{11}(z) + \Phi_{11}(-z)]$$
$$= -k^2\frac{\Theta_{11}^4}{\Theta_{10}^4}\frac{\Theta_{00}(z)\cdot\Theta_{00}(-z)\cdot\Theta_{10}(z)\,\Theta_{10}(-z)\sin\frac{\pi z}{\omega_1}\cos\frac{\pi z}{\omega_1}}{\Theta_{01}(z)\cdot\Theta_{01}(-z)\,\Theta_{11}(z)\,\Theta_{11}(-z)}$$
$$= 8\sqrt{q}\,\frac{\Theta_{00}(2z, 2\omega_2)\,\Theta_{00}(-2z, 2\omega_2)\sin\frac{2\pi z}{\omega_1}}{\Theta_{01}(2z, 2\omega_2)\,\Theta_{01}(-2z, 2\omega_2)}.$$

§ 27.

Aus der letzten Gleichung kann man auch $\operatorname{sn} z$ durch Φ-Funktionen darstellen. Mit Benutzung der Formeln $\frac{K}{\pi} = \frac{1}{2}\frac{\Theta_{11}^2\,\Theta_{00}^2}{\Theta_{10}^2\,\Theta_{01}^2}$, $\omega_1 = K$ und $\omega_2 = iK'$ verwandelt sich Gleichung (46) in

$$\left[\Phi_{11}\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{11}\left(-\frac{z}{2}\right) - \Phi_{01}\left(\frac{z}{2}\right) + \Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{4\,e^{-\frac{\pi K'}{K}}}{i}\,\frac{\Theta_{10}^2\,\Theta_{00}^2}{\Theta_{11}^2\,\Theta_{01}^2}\,\frac{\Theta_{00}(z, 2iK')\,\Theta_{00}(-z, 2iK')\sin\frac{\pi z}{K}}{\Theta_{01}(z, 2iK')\,\Theta_{01}(-z, 2iK')}.$$

Wir wollen überall in dieser Gleichung iK' durch $\frac{iK'}{2}$ ersetzen. Die Konstante $\frac{\Theta_{10}^2\,\Theta_{00}^2}{\Theta_{11}^2\,\Theta_{01}^2}$ ändert sich auch, weil sie eine Funktion von K' ist. Um ihren neuen Wert zu finden, benutzen wir Formel (19). Daraus folgt

$$\left[4\,e^{-\frac{\pi K'}{K}}\,\frac{\Theta_{10}^2\,\Theta_{00}^2}{\Theta_{11}^2\,\Theta_{01}^2}\right]_{K' = \frac{K'}{2}} = 4\,e^{-\frac{\pi K'}{2K}}\,\frac{\Theta_{00}^2}{\Theta_{11}^2}.$$

Zu unserem Zwecke wollen wir dies so schreiben:

$$4\,e^{-\frac{\pi K'}{2K}}\,\frac{\Theta_{00}^2}{\Theta_{11}^2} = 4\,e^{-\frac{\pi K'}{2K}}\,\frac{\Theta_{00}^2\,\Theta_{10}^2}{\Theta_{01}^2\,\Theta_{11}^2}\,\frac{\Theta_{11}^2}{\Theta_{10}^2} = \frac{2Kk}{\pi}\cdot\frac{\Theta_{11}^2}{\Theta_{10}^2}.$$

Jetzt ersetzen wir iK' durch $\frac{iK'}{2}$ in der obigen Gleichung, dann wird die rechte Seite

$$\frac{2Kk}{\pi i}\,\frac{\Theta_{11}^2}{\Theta_{10}^2}\,\frac{\Theta_{00}(z)\;\Theta_{00}(-z)\sin\frac{\pi z}{K}}{\Theta_{01}(z)\,\Theta_{01}(-z)}.$$

Dies ist gerade $\frac{2Kk}{\pi i}\operatorname{sn} 2z$. Dann ist

$$\frac{2Kk}{\pi i}\operatorname{sn} 2z = \Phi_{11}\left(\frac{z}{2}, \frac{iK'}{2}\right) - \Phi_{11}\left(-\frac{z}{2}, \frac{iK'}{2}\right) - \Phi_{01}\left(\frac{z}{2}, \frac{iK'}{2}\right) + \Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}, \frac{iK'}{2}\right). \tag{47}$$

Aus diesem Ausdruck kann man mittels Formel (14b) $\operatorname{sn} z$ in der gewöhnlichen Reihe leicht darstellen.

Ebenso ersetzen wir iK' durch $2iK'$ in der Gleichung (44) und die Werte der Konstanten finden wie oben folgendermassen:

$$\left[\frac{Kk'}{\pi}\right]_{iK'=2iK'} = \left[\frac{\Theta_{00}^2\,\Theta_{01}^2}{\Theta_{10}^2\,\Theta_{11}^2}\right]_{K'=2K'} = \frac{\Theta_{00}^2}{\Theta_{10}^2} = \left(\frac{\Theta_{00}^2\,\Theta_{11}^2}{\Theta_{10}^2\,\Theta_{01}^2}\right)\cdot\frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{11}^2} = \frac{2K}{\pi}\frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{11}^2}.$$

Dann ist

$$\frac{2K}{\pi i}\frac{\Theta_{01}^2}{\Theta_{11}^2}\frac{\Theta_{10}\left(\frac{z}{2}\right)\Theta_{10}\left(-\frac{z}{2}\right)\cos\frac{\pi z}{2K}}{\Theta_{00}\left(\frac{z}{2}\right)\Theta_{00}\left(-\frac{z}{2}\right)\sin\frac{\pi z}{2K}} =$$

$$\frac{2K}{\pi i}\frac{\mathrm{cn}\,z}{\mathrm{dn}\,z} = \Phi_{01}\left(\frac{z}{2}, 2iK'\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}, 2iK'\right)$$

$$-\Phi_{00}\left(\frac{z}{2}, 2iK'\right) + \Theta_{00}\left(-\frac{z}{2}, 2iK'\right) + \frac{1}{2}\cot\frac{\pi z}{2K}. \tag{48}$$

Multiplizieren wir die Gleichung (44) mit (45) und nehmen die Quadratwurzel, so bekommen wir

$$\frac{K}{\pi i}\,\mathrm{dn}\,z = \left[\Phi_{01}\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}\right) - \Phi_{00}\left(\frac{z}{2}\right) + \Phi_{00}\left(-\frac{z}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cot\frac{\pi z}{2K}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\Phi_{01}\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}\right) - \Phi_{10}\left(\frac{z}{2}\right) + \Phi_{10}\left(-\frac{z}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\tan\frac{\pi z}{2K}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{49}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen finden wir leicht den Wert von $\mathrm{cn}\,z$, und so haben wir jede elliptische Funktion mittels Φ-Funktionen dargestellt.

§ 28. Entwicklung der Logarithmen der elliptischen Funktionen.

Mittels der Φ-Funktionen kann man die gewöhnliche Reihe für $\log \mathrm{sn}\,z$, $\log \mathrm{cn}\,z$ leicht finden. Nehmen wir die Abteilung der Gleichung (38), so bekommen wir

$$\frac{d\log \mathrm{sn}\,z}{dz} = \frac{\pi i}{K}\left[-\Phi_{00}\left(\frac{z}{2}\right) + \Phi_{00}\left(-\frac{z}{2}\right) + \Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}\right) + \frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi z}{2K}\right] \tag{50}$$

$$\text{aus (14b)} \quad = -\frac{2\pi}{K}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{\lambda}{2}}}{1+q^{\lambda}}\sin\frac{\lambda\pi z}{K} + \frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi z}{2K},$$

also ist

$$\log \operatorname{sn} z = 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda\left(1+q^{\frac{\lambda}{2}}\right)} \cos \frac{\lambda \pi z}{K} + \log \sin \frac{\pi z}{2K} + \log \frac{O_{11}^2}{O_{10}^2}.$$

Auch ist

$$(51) \qquad \frac{d \log \operatorname{cn} z}{dz} = \frac{\pi i}{K}\left[-\Phi_{10}\left(\frac{z}{2}\right) + \Phi_{10}\left(-\frac{z}{2}\right) + \Phi_{01}\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)\right] - \frac{\pi}{2K} \tan \frac{\pi z}{2K}$$

$$\log \operatorname{cn} z = 2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{\lambda}{2}}}{\lambda\left(1+(-1)^{\lambda} q^{\frac{\lambda}{2}}\right)} \sin \frac{\lambda \pi z}{K} + \log \cos \frac{\pi z}{2K} + \log \frac{O_{01}^2}{O_{10}^2}$$

(52)

$$\frac{d \log \operatorname{dn} z}{dz} = \frac{\pi i}{K}\left[-\Phi_{11}\left(\frac{z}{2}\right) + \Phi_{11}\left(-\frac{z}{2}\right) + \Phi_{01}\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)\right]$$

$$\log \operatorname{dn} z = 4 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{2\lambda-1}{2}}}{(2\lambda-1)\left(1-q^{2\lambda-1}\right)} \sin (2\lambda-1) \frac{\pi z}{K} + \log \frac{O_{01}^2}{O_{11}^2}.$$

§ 29. Darstellung der Konstanten der elliptischen Funktionen durch Φ-Funktionen.

Aus den Gleichungen (50) und (51) des vorhergehenden Abschnitts können wir k′ und K durch Φ-Funktionen darstellen. Man findet leicht aus (38), (39) und (40), dass

$$\left[\frac{d \log \operatorname{sn} z}{dz}\right]_{z=\frac{K}{2}} = \frac{\operatorname{cn} \frac{K}{2} \operatorname{dn} \frac{K}{2}}{\operatorname{sn} \frac{K}{2}} = k', \text{ und } \left[\frac{d \log \operatorname{cn} z}{dz}\right]_{z=\frac{K}{2}} = -1.$$

Dann ist

$$\frac{\pi i}{K}\left[-\Phi_{10}\left(\frac{K}{4}\right) + \Phi_{10}\left(-\frac{K}{4}\right) + \Phi_{01}\left(\frac{K}{4}\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{K}{4}\right)\right] - \frac{\pi}{2K} = -1,$$

und

$$\frac{\pi i}{K}\left[-\Phi_{00}\left(\frac{K}{4}\right) + \Phi_{00}\left(-\frac{K}{4}\right) + \Phi_{01}\left(\frac{K}{4}\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{K}{4}\right)\right] - \frac{\pi}{2K} = k',$$

oder

$$(53)\quad \frac{2K}{\pi} = 1 - 4\,\frac{\Phi_{10}\left(\frac{K}{4}\right) - \Phi_{10}\left(-\frac{K}{4}\right)}{2i} + 4\,\frac{\Phi_{01}\left(\frac{K}{4}\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{K}{4}\right)}{2i}$$
$$= 4\,\frac{\Phi_{01}\left(\frac{K}{4}\right) - \Phi_{11}\left(\frac{K}{4}\right)}{(1-k')i}.$$

Die rechte Seite lässt sich in eine unendliche Reihe aus (14b) darstellen:

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + 4\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^{\lambda+1}\,\frac{q^{\lambda-\frac{1}{2}}}{1-q^{\lambda-\frac{1}{2}}}.$$

Aus der zweiten Gleichung bekommt man

$$(54)\quad \frac{2k'K}{\pi} = 1 + 4\,\frac{\Phi_{00}\left(\frac{K}{4}\right) - \Phi_{00}\left(-\frac{K}{4}\right)}{2i} - 4\,\frac{\Phi_{01}\left(\frac{K}{4}\right) - \Phi_{01}\left(\frac{K}{4}\right)}{2i}$$
$$= 1 + 4\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^{\lambda}\,\frac{q^{\lambda-\frac{1}{2}}}{1+q^{\lambda-\frac{1}{2}}}.$$

§ 30.

Jacobi hat seine Z-Funktion durch die folgende Gleichung definiert:

$$\frac{2K}{\pi}\,Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 4\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^{\lambda}}{1-q^{2\lambda}}\sin 2\lambda x, \text{ wobei } q = e^{-\frac{K'\pi}{K}}.$$

Aus Formel (14) sehen wir, dass

$$\frac{2K}{\pi}\,Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) - \frac{4}{2i}\left[\Phi_{01}\left(\frac{Kx}{\pi}\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{Kx}{\pi}\right)\right] \text{ oder}$$

$$(55)\quad Z(z) = \frac{\pi}{Ki}\left[\Phi_{01}\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)\right].$$

Mittels dieser Gleichung können wir die Funktionalgleichung für $Z(z)$ leicht finden. Setzen wir $z = z + K$

$Z(z+K) = \frac{\pi}{Ki}\left[\Phi_{11}\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{11}\left(-\frac{z}{2}\right)\right]$. Aus Formel (52) folgt so gleich $Z(z) - Z(z+K) = -\frac{d\log dn\,z}{dz} = \frac{k^2\,sn\,z\,cn\,z}{dn\,z}$.

Seine Definition der Θ-Funktion ist

$$\frac{\Theta(z)}{\Theta(0)} = e^{\int_0^z Z(z)\,dz}.$$

Aber

$$\int_0^z Z(z)\,dz = \frac{\pi}{K i}\int_0^z \left[\Phi_{01}\left(\frac{z}{2}\right) - \Phi_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\log O_{01}\left(\frac{z}{2}\right) + \log O_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)\right]_0^z.$$

Also ist $\frac{\Theta(z)}{\Theta(0)} = \frac{O_{01}\left(\frac{z}{2}\right) O_{01}\left(-\frac{z}{2}\right)}{O_{01}^2}$, und setzen wir, wie Jacobi,

$$\Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = O_{00}\,O_{01}^2, \text{ so ist}$$

$$\Theta(z) = O_{00}\,O_{01}\left(\frac{z}{2}\right) O_{01}\left(-\frac{z}{2}\right). \tag{56}$$

Weil $H(z) = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,z\,\Theta(z)$, so ist

$$H(z) = 2\sqrt[8]{q}\,O_{00}\,O_{00}\left(\frac{z}{2}\right) O_{00}\left(-\frac{z}{2}\right) \sin\frac{\pi z}{2K}.$$

Diese Formeln für K und Θ gibt in anderer Form Heine d. c. S. 110, bei denen der absolute Betrag der O-Funktion eingehe.

§ 31. Beziehung zwischen den O-Funktionen und den σ-Funktionen.

Nehmen wir an, dass die σ-Funktion durch das unendliche Produkt

$$\sigma(z) = z \prod' \left(1 - \frac{z}{\Omega}\right) e^{\frac{z}{\Omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega}\right)^2}$$

wobei $\Omega = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$

$n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$

$n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$

definiert ist und von dieser Definition aus werden wir die Beziehungen zwischen den O-Funktionen und den σ-Funktionen finden.

In § 21 haben wir gezeigt, dass

$$\prod_{-1}^{\infty}\prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}\right) e^{\frac{z}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}} = e^{\frac{2\pi i}{\omega_1} z\,\Phi_{00}} \frac{O_{00}(z)}{O_{00}}.$$

Ersetzen wir z durch $-z$, so bekommen wir

$$\prod_{n_2=1}^{\infty} \prod_{n_1=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}\right) e^{\frac{z}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}} = e^{-\frac{2\pi i}{\omega_1} z \Phi_{00}} \frac{O_{00}(-z)}{O_{00}}.$$

Die σ-Funktion enthält alle diese Faktoren und auch die Faktoren für $n_2 = 0$ und $n_1 = +1, \pm 2, \ldots\ldots$ oder

$$z \prod_{n_1=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n_1\omega_1}\right) e^{\frac{z}{n_1\omega_1}}$$

was gerade $\frac{\omega_1}{\pi} \sin \frac{\pi z}{\omega_1}$ ist. Dann ist

$$z \prod_{n_2=\infty}^{+\infty} \prod_{n_1=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}\right) e^{\frac{z}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}}$$

$$= \frac{\omega_1}{\pi} \sin \frac{\pi z}{\omega_1} \frac{O_{00}(z)\, O_{00}(-z)}{O_{00}^2}$$

wobei das unendliche Produkt gerade in dieser Reihenfolge multipliziert werden muss. Der andere Faktor $e^{\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2}$ in $\sigma(z)$ muss auch konvergieren, wenn wir die Summe in derselben Reihenfolge addieren. Setzen wir zur Abkürzung $\sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)} = c$, dann ist

$$(57)\quad \sigma(z) = \frac{\omega_1}{\pi} e^{\frac{c}{2} z^2} \sin \frac{\pi z}{\omega_1} \frac{O_{00}(z)\, O_{00}(-z)}{O_{00}^2}$$

$$= \frac{\omega_1 i}{2\pi} e^{\frac{c}{2} z^2 - \frac{\pi i z}{\omega_1}} \frac{O_{00}(z - \omega_2)\, O_{00}(-z)}{O_{00}^2}.$$

§ 32. Funktionalgleichungen der σ-Funktion.

Mittels der Beziehung zwischen der O- und σ-Funktion kann man die Funktionalgleichungen für $\sigma(z)$ leicht erhalten. Ersetzt man z durch $z + \omega_1$, so wird

$$\sigma(z + \omega_1) = \frac{\omega_1 i}{2\pi} e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(z+\omega_1) + \frac{c}{2}(z+\omega_1)^2} \frac{O_{00}(z - \omega_2)\, O_{00}(-z)}{O_{00}^2}$$

$$= -e^{\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) c\, \omega}\, \sigma(z).$$

Ersetzt man anderseits z durch $z + \omega_2$, so wird

$$\sigma(z+\omega_2) = \frac{\omega_1}{2\pi} i\, e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(z+\omega_2)+\frac{c}{2}(z+\omega_2)^2} \frac{\Theta_{00}(z)\ \Theta_{00}(-z-\omega_2)}{\Theta_{00}^2}.$$

Aber es ist $\Theta_{00}(z)\cdot\Theta_{00}(-z-\omega_2) = -e^{-\frac{2\pi i z}{\omega_1}}\Theta_{00}(z-\omega_2)(\Theta_{00}-z)$

und daher $\sigma(z+\omega_2) = -e^{\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right)\left(-\frac{2\pi i}{\omega_1}+c\,\omega_2\right)}\sigma z.$

Schliesslich ist

$$\sigma(z+\omega_1) = -e^{\eta_1\left(z+\frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma(z)$$

$$\sigma(z+\omega_2) = -e^{\eta_2\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right)}\sigma(z)$$

wobei $\eta_1 = c\,\omega_1$ und $\eta_2 = -\frac{2\pi i}{\omega_1} + c\,\omega_2.$

Dann ist

$$\eta_1 = \omega_1 \sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2}$$

$$= 2\,\omega_1 \sum_{n_2=1}^{\infty}\ \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2} + \omega_1 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n_1^2\omega_1^2}$$

$$(58)\quad \eta_1 = 4\pi i\,\Phi'_{00} + \frac{\pi^2}{3\,\omega_1}.$$

§ 33. Beziehung zwischen der Φ-Funktion und der ζ-Funktion.

Die Funktion $\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$ lässt sich leicht durch Φ-Funktionen darstellen. Aus Formel (57) ist

$$(59)\quad \zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{\eta_1 z}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_1}\cot\frac{\pi z}{\omega_1} - \frac{2\pi i}{\omega_1}[\Phi_{00}(z) - \Phi_{00}(-z)]$$

$$= \frac{\eta_1 z}{\omega_1} - \frac{\pi i}{\omega_1} - \frac{2\pi i}{\omega_1}[\Phi_{00}(z-\omega_2) - \Phi_{00}(-z)].$$

Dann können wir aus Formel (14b) $\zeta(z)$ unmittelbar in der Form darstellen:

$$\zeta(z) = \frac{\eta_1 z}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_1}\left[\cot\frac{\pi z}{\omega_1} + 4\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{q^\lambda}{1-q^\lambda}\sin\lambda\frac{2\pi z}{\omega_1}\right]$$

und aus Formel (15)

$$\zeta(z) = \frac{\eta_1 z}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_1}\left[\cot\frac{\pi z}{\omega_1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{\pi}{\omega_1}(z + n\omega_2) + i\right)\right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{\pi}{\omega_1}(z - n\omega_2) - i\right)\right].$$

Auch ist

$$(60)\quad p(z) = -\zeta'(z) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{2\pi i}{\omega_1}[\Phi'_{00}(z-\omega_2) + \Phi'_{00}(-z)]$$
$$= -\frac{\pi^2}{3\omega_1^2} + \frac{2\pi i}{\omega_1}[\Phi'_{00}(z-\omega_2) + \Phi'_{00}(-z) - 2\Phi'_{00}].$$

§ 34. Darstellung der Funktionen $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$ und $\sigma_3(z)$ durch Θ-Funktionen.

Mit Benutzung der Definitionen von Weierstrass für $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$ $\sigma_3(z)$ nämlich

$$\sigma_1(z) = e^{-\eta_1 z}\frac{\sigma\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}\right)},\quad \sigma_2(z) = e^{-(\eta_1+\eta_2)z}\frac{\sigma\left(z+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}$$

und $\sigma_3(z) = e^{-\eta_2 z}\dfrac{\sigma\left(z+\frac{\omega_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}$, erhalten wir

$$\sigma_1(z) = e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}}\frac{-\pi i z}{\omega_1}\frac{\Theta_{10}(z-\omega_2)\,\Theta(-z)}{2\Theta_{10}^2}$$
$$= e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}}\cos\frac{\pi z}{\omega_1}\frac{\Theta_{10}(z)}{\Theta_{10}}\frac{\Theta_{10}(-z)}{\Theta_{10}}$$
$$\sigma_2(z) = e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}}\frac{\Theta_{11}(z)}{\Theta_{11}^2}\frac{\Theta_{11}(-z)}{\Theta_{11}^2}$$
$$\sigma_3(z) = e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}}\frac{\Theta_{01}(z)}{\Theta_{01}^2}\frac{\Theta_{01}(-z)}{\Theta_{01}^2}.$$

Die Produkt- und Reihenentwicklung von $\sigma(z)$, $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$ und $\sigma_3(z)$ folgt unmittelbar aus (2) und (8).

§ 35. Beziehungen zwischen den O-Funktionen und den ϑ-Funktionen.

Nehmen wir an, dass die ϑ-Funktionen durch die Funktionalgleichungen

$$\vartheta(v+1) = -e^{-\pi i g_1}\vartheta(v)$$
$$\vartheta(v+\omega) = e^{-\pi i(v+\omega)}e^{-\pi i g_2}\vartheta(v)$$

definiert sind; aus dieser Definition wollen wir die Beziehungen zwischen den O-Funktionen und den ϑ-Funktionen finden. Wir haben schon in § 7 gezeigt, dass $F_{a_1 1}(z) = O_{a_1 1}(z)\, O_{a_1 1}(-z)$ den Funktionalgleichungen

$$F_{a_1 1}(z+\omega_1) = F_{a_1 1}(z)$$

und $$F_{a_1 1}(z+\omega_1) = -e^{\frac{\pi}{\omega_1}(2z+\omega_2+a_1\omega_1)}F_{a_1 1}(z)$$

genügt. Durch Vergleichung erhalten wir

$$\vartheta_{00}\left(\frac{z}{\omega_1}, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = c_1' O_{11}(z)\, O_{11}(-z)$$

$$\vartheta_{01}\left(\frac{z}{\omega_1}, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = c_2' O_{01}(z)\, O_{01}(-z)$$

oder $$\vartheta_{00}(z) = c_1 O_{11}(z, 1, \omega)\, O_{11}(-z, 1, \omega)$$
$$\vartheta_{01}(z) = c_2 O_{01}(z, 1, \omega)\, O_{01}(-z, 1, \omega).$$

Auch haben wir gezeigt, dass $F_{a_1 0}(z) = O_{a_1 0}(z-\omega_2)\, O_{a_1 0}(-z)$ den Funktionalgleichungen

$$F_{a_1 0}(z+\omega_1) = F_{a_1 0}(z)$$

$$F_{a_1 0}(z+\omega_2) = -e^{\frac{\pi}{\omega_1}(2z+a_1\omega_1)}F_{a_1 0}(z)$$

genügt.

Hier müssen wir noch einen anderen Faktor, $e^{-\frac{\pi i z}{\omega_1}}$, einführen, um die Funktionalgleichungen ähnlich zu machen. Dann genügt $e^{-\frac{\pi i z}{\omega_1}}F_{a_1 0}(z) = f(z)$ den folgenden Gleichungen:

$$f(z+\omega_1) = -f(z)$$

$$f(z+\omega_2) = -e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(2z+\omega_2+a_1\omega_1)}f(z).$$

Dann ist

$$\vartheta_{10}\left(\frac{z}{\omega_1}, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = c_3' e^{-\frac{\pi i z}{\omega_1}} O_{10}(z-\omega_2)\, O_{10}(-z)$$

$$= 2c_3' \cos\frac{\pi z}{\omega_1} O_{10}(z)\, O_{10}(-z)$$

$$\text{und } \vartheta_{11}\left(\frac{z}{\omega_1}, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = c_4' \, e^{-\frac{\pi i z}{\omega_1}} O_{00}(z - \omega_2) \, O_{00}(-z)$$

$$= -2 i c_4' \sin \frac{\pi z}{\omega_1} O_{00}(z) \, O_{00}(-z)$$

$$\text{oder } \vartheta_{10}(z) = 2 c_3 \cos \pi z \, O_{10}(z, 1, \omega) \, O_{10}(-z, 1, \omega)$$

$$\vartheta_{11}(z) = -2 i c_4 \sin \pi z \, O_{00}(z, 1, \omega) \, O_{00}(-z, 1, \omega).$$

In der obigen Definition sind die Werte von c_1, c_2, c_3, c_4 nicht festgesetzt. Wie gewöhnlich nehmen wir an, dass $c_2 = c_1$ und $c_4 = i c_3 = i e^{\frac{\pi i \omega_2}{4}} c_1$ und auch dass $\vartheta'_{11} = \pi \vartheta_{00} \vartheta_{10} \vartheta_{01}$ ist. Aus diesen Bedingungen beweisen wir leicht, dass $c_1 = O_{00}(0, 1, \omega)$. Daher lassen sich die ϑ-Funktionen durch O-Funktionen mit $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \omega$ in der folgenden Weise darstellen:

(61)
$$\vartheta_{00}(z) = O_{00} \, O_{11}(z) \, O_{11}(-z)$$

$$\vartheta_{01}(z) = O_{00} \, O_{01}(z) \, O_{01}(-z)$$

$$\vartheta_{10}(z) = 2 e^{\frac{\pi i \omega}{4}} O_{00} \, O_{10}(z) \, O_{10}(-z) \cos \pi z$$

$$\vartheta_{11}(z) = 2 e^{\frac{\pi i \omega}{4}} O_{00} \, O_{00}(z) \, O_{00}(-z) \sin \pi z.$$

Daraus folgen sogleich mittels Formel (2) und (8) die Produkt und Reihenentwicklungen der ϑ-Funktionen.

§ 36. Transformationen von Gauss und Landen.

Als ein Beispiel, wie man O-Funktionen benutzen kann, um Beziehungen zwischen ϑ-Funktionen zu finden, wollen wir die Transformationen von Gauss beweisen. Es ist

$$\vartheta_{10}\left(z, \frac{\omega}{2}\right) = 2 O_{00}\left(0, \frac{\omega}{2}\right) e^{\frac{\pi i \omega}{8}} O_{10}\left(z, \frac{\omega}{2}\right) O_{10}\left(-z, \frac{\omega}{2}\right) \cos \pi z$$

$$= 2 O_{00} \, O_{01} \, e^{\frac{\pi i \omega}{8}} O_{10}(z) \, O_{10}(-z) \, O_{11}(z) \, O_{11}(-z) \cos \pi z$$

$$= e^{-\frac{\pi i \omega}{8}} \frac{O_{01}}{O_{00}} \vartheta_{10}(z) \, \vartheta_{00}(z).$$

Setzen wir $z = 0$

$$\vartheta_{10}\left(0, \frac{\omega}{2}\right) = 2 e^{\frac{\pi i \omega}{8}} O_{00} \, O_{01} \, O_{10}^2 \, O_{11}^2$$

$$= 2 e^{\frac{\pi i \omega}{8}} \frac{O_{00}}{O_{01}}.$$

Dann ist

$$\vartheta_{10}\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \cdot \vartheta_{10}\left(z, \frac{\omega}{2}\right) = 2\,\vartheta_{10}(z)\,\vartheta_{00}(z).$$

Auch ist

$$\vartheta_{11}\left(z, \frac{\omega}{2}\right) = 2\,e^{\frac{\pi i \omega}{8}} O_{00} O_{01} O_{00}(z) O_{00}(\quad z) O_{01}(z) O_{01}(-z) \sin \pi z$$

$$= e^{-\frac{\pi i \omega}{8}} \frac{O_{01}}{O_{00}}\, \vartheta_{11}(z) \cdot \vartheta_{01}(z).$$

Dann ist

$$\vartheta_{10}\left(0, \frac{\omega}{2}\right) \vartheta_{11}\left(z, \frac{\omega}{2}\right) = 2\,\vartheta_{11}(z) \cdot \vartheta_{01}(z).$$

In ähnlicher Weise kann man die Transformationen von Landen mittels der Formeln (19) beweisen.

§ 37. Multiplikationstheoreme der elliptischen Funktionen.

Die verschiedenen Multiplikationstheoreme der elliptischen Funktionen lassen sich leicht aus den Formeln von § 18 erhalten. Die Formeln für $\vartheta_{00}(n\,z, n\,\omega)$, $\vartheta_{00}\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$, $\vartheta_{00}(n\,z)$, $\vartheta_{01}(n\,z, n\,\omega)$ u. s. w. folgen sogleich aus den entsprechenden Formeln für $F_{00}(z)$ und $F_{01}(z)$. Die Formeln für $\vartheta_{10}(z)$ wollen wir beweisen.

Im folgenden Beweis ist n ungerade, $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \omega$ in jeder Θ- und F-Funktion und die unendlichen Produkte sind für die Reihe $-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2} \ldots\ldots \frac{n-1}{2}$ genommen.

$$\vartheta_{10}(z) = e^{\frac{\pi i \omega}{4} - \pi i z} \cdot O_{00} \cdot F_{10}(z).$$

Dann ist

$$\vartheta_{10}(n\,z, n\,\omega) = e^{\frac{n \pi i \omega}{4} - n \pi i z} F_{10}(n\,z, n\,\omega) \cdot O_{00}(0, n\,\omega)$$

aus (22c)

$$= e^{\pi i \Sigma s} \frac{O_{00}(0, n\,\omega)}{O_{00}^{n}} \prod_{s} e^{\frac{\pi i \omega}{4} - \pi i \left(z + \frac{s}{n}\right)} O_{00} F_{10}\left(z + \frac{s}{n}\right)$$

$$= \frac{O_{00}(0, n\,\omega)}{O_{00}^{n}} \prod_{s} \vartheta_{10}\left(z + \frac{s}{n}\right).$$

Auch ist

$$\vartheta_{10}\left(z, \frac{\omega}{n}\right) = e^{\frac{\pi i \omega}{4n} - \pi i z} O_{00}\left(0, \frac{\omega}{n}\right) F_{10}\left(z, \frac{\omega}{n}\right)$$

aus (23b)

$$= e^{\frac{\pi i \omega}{4n} - \pi i z} e^{-\pi i (n-1) z + \frac{n^2-1}{4n} \pi i \omega} O_{00}\left(0, \frac{\omega}{n}\right) \left| s \right| F_{10}\left(z + \frac{s}{n}\right)$$

$$= e^{n\frac{\pi i \omega}{4} - n\pi i z} O_{00}\left(0, \frac{\omega}{n}\right) \left| s \right| F_{10}\left(z + \frac{s}{n}\right)$$

$$= \frac{O_{00}\left(0, \frac{\omega}{n}\right)}{O_{00}^{n}} \left| s \right| \vartheta_{10}\left(z + \frac{s}{n}\right)$$

$$\vartheta_{10}(nz) = e^{\frac{\pi i \omega}{4} - n\pi i z} O_{00} F_{10}(nz)$$

aus (23d)

$$= e^{\frac{\pi i \omega}{4} - n\pi i z} e^{-\pi i n (n-1) z + \left(\frac{n^2-1}{4}\right) \pi i \omega} O_{00} \left| \quad \right| F_{10}\left(z + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \omega}{n}\right)$$

$$= O_{00}\, e^{n^2\left[\frac{\pi i \omega}{4} - \pi i z\right]} \left| s \right| F_{10}\left(z + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \omega}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{O_{00}^{n^2-1}} \left| \quad \right| \vartheta_{10}\left(z + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \omega}{n}\right).$$

In ähnlicher Weise kann man die Formeln für $\vartheta_{11}(z)$ finden. Auch folgen sogleich die Formeln für sn(nz), cn(nz) und dn(nz).

§ 38.

Ich habe also jede der fundamentalen elliptischen Funktionen durch O-Funktionen dargestellt; daraus konnte man die Beziehungen zwischen den verschiedenen elliptischen Funktionen unmittelbar ersehen. Jede elliptische Funktion ist aus O-Funktionen gebildet, daher sind diese würdig, in die elementare Theorie der elliptischen Funktionen eingeführt zu werden, indem anzunehmen ist, dass man viele Eigenschaften der elliptischen Funktionen mittels O-Funktionen einfacher beweisen kann als auf die gewöhnliche Art. Auf diese

Beziehungen hat Heine zuerst hingewiesen; bei ihm werden aber gerade diejenigen Formeln aus der Theorie der elliptischen Funktionen nicht ausgeführt, die wir hier abgeleitet haben; vor allem ist bei uns durch Einführung der vier Funktionen $O_{00}\ O_{01}\ O_{10}\ O_{11}$ die Analogie mit den vier Θ-Funktionen klarer zum Ausdruck gebracht. Andersartige Anwendungen auf die Theorie der elliptischen Funktionen findet man bei Heine, Crellesches Journal, Bd. 39.

Lebenslauf.

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit wurde am 12. August 1866 zu Cambridge im Staate New-York geboren. Nach dem Besuch einer Elementarschule in Greenwich hat er vier Jahre an der Union-Universität in Schenectady studiert und wurde im Jahre 1887 zum Baccalaureus artium promoviert. Fünf Jahre lang lehrte er in Elementarschulen. Während der Jahre 1892—1894 widmete er sich dem Studium der mathematischen Wissenschaften an der Harvard-Universität, wobei er die Vorlesungen der Herren Professoren J. M. Pierce, Byerly, Osgood und Bôcher besuchte. Im Juni 1893 wurde er dort zum Magister artium promoviert. Von 1894—1902 war er Instruktor an der Harvard-Universität und daraufhin Assistant-Professor an der Kansas-Universität. Im Mai 1908 begab er sich nach München, wo er seine Studien hauptsächlich bei den Herren Professoren Lindemann, Voss und Pringsheim fortsetzte.